

# CHAPITRE 3

Introduction aux méthodes  
algébriques de résolution d'équations

Dans ce chapitre, nous discuterons d'une séquence d'enseignement de trois leçons sur la résolution d'équations en 7<sup>e</sup> année. La séquence d'enseignement illustre les idées de base d'une leçon modèle qui favorise le passage à l'abstrait, telles qu'elles sont mentionnées à la fin du chapitre 2.

On sait qu'en 7<sup>e</sup> année la résolution d'équations se fait par « essais systématiques et par inspection » (*Le curriculum de l'Ontario de la 1<sup>re</sup> à la 8<sup>e</sup> année, Mathématiques*, version révisée 2005, p. 82.). Les méthodes par essais systématiques et par inspection relèvent en fait de l'arithmétique. Elles ne font pas intervenir les concepts clés propres à la résolution d'équations par des méthodes algébriques — en particulier, elles ne font pas intervenir l'idée que l'égalité entre les deux côtés de l'équation se conserve, si on enlève un même nombre de chaque côté (ou si on ajoute un même nombre de chaque côté). Toutefois, nous verrons que les méthodes algébriques de résolution d'équations peuvent être abordées en 7<sup>e</sup> année avec succès.<sup>9</sup>

L'idée générale du début de la séquence d'enseignement a été la suivante.

Les élèves et l'enseignante discutent de la façon de résoudre un problème posé sous forme d'histoire : il s'agit d'un problème de cartes de hockey et d'enveloppes contenant un nombre inconnu de cartes de hockey. Deux élèves modélisent le problème au tableau, à l'aide de matériel concret (matériel de manipulation) que nous avons préparé au préalable (il s'agit de cartes de hockey simulées par des petits cartons verts et d'enveloppes; voir Figure 1).



Figure 1. Deux élèves simulent un problème à l'aide de cartes de hockey et d'enveloppes.

On s'attend à ce que la modélisation ne pose pas de problèmes. Par contre, les élèves vont probablement utiliser des méthodes arithmétiques, comme les « essais systématiques », qu'ils connaissent pour résoudre l'équation. L'enseignante interviendra pour essayer de les amener aussi loin que possible dans l'utilisation des méthodes algébriques.

Par la suite, les élèves travaillent en petits groupes de 3 à 4 élèves. Ils résolvent deux problèmes similaires (problèmes 2 et 3 de la feuille de route<sup>10</sup>), afin de prendre conscience de la méthode algébrique et d'arriver à une certaine stabilisation cognitive de celle-ci.

Avant d'aller plus loin, nous allons présenter quelques extraits des discussions que les élèves et l'enseignante ont eues en salle de classe.

<sup>9</sup> En fait, plusieurs recherches montrent que les méthodes algébriques d'équations peuvent commencer à être introduites plus tôt, dès la 4<sup>e</sup> année (voir, p. ex., Carraher, Schliemann et Brizuela, 2001; Brizuela et Schliemann, 2004).

<sup>10</sup> Voir la feuille de route en annexe.

## L'émergence des idées algébriques

Voici le problème avec lequel l'enseignante a amorcé la leçon :

La mère de Paulette et de Richard décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe.

Paulette avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.

Richard avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 2 enveloppes.

Maintenant les 2 enfants ont le même nombre de cartes de hockey.

Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

Comme il a été prévu, deux élèves ont modélisé l'équation au tableau sans difficultés (Figure 1). Ils sont allés s'asseoir et l'enseignante a posé la question à toute la classe, à savoir « Comment résoudre l'équation? ».

Une élève, Maria<sup>11</sup>, a suggéré d'enlever deux cartes à Paulette et deux cartes à Richard (voir Figure 2, gauche). De là, une autre élève, Jeannine, a conclu qu'il y a cinq cartes dans une enveloppe. Elle a dit :

« Il en reste cinq [cartes], donc une des formes [c'est-à-dire des enveloppes] de l'autre côté va en avoir 5, puis, après,... ben, elles vont toutes avoir 5 [cartes] dedans. »

La Figure 2 illustre la stratégie proposée par Maria et Jeannine.

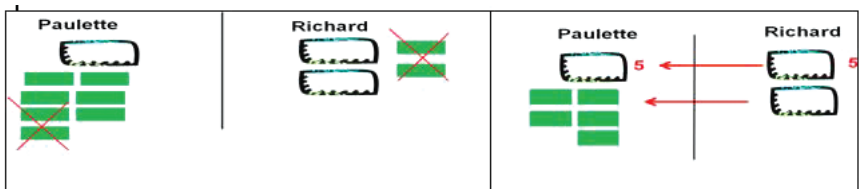


Figure 2. À gauche, Maria suggère d'enlever deux cartes de chaque côté de l'équation. À droite, Jeannine associe les deux enveloppes du haut et conclut que l'enveloppe du bas a 5 cartes. Puisque toutes les enveloppes ont le même nombre de cartes, elle dit : « elles vont toutes avoir 5 [cartes] dedans. »

La réponse, bien sûr, est correcte. Mais l'enseignante n'est pas intéressée par la réponse : ce qu'elle vise, c'est la procédure algébrique. Jeannine a utilisé une méthode par *association* : le nombre de cartes de hockey dans l'enveloppe à gauche, du haut, est le même que celui dans l'enveloppe

<sup>11</sup> Pour des raisons déontologiques, partout dans le livre, nous avons dû changer le nom des élèves.

à droite, du haut. Donc, pour qu'il y ait égalité, les 5 cartes à gauche doivent être égales au nombre de cartes dans l'enveloppe à droite, au bas.

Le raisonnement de Jeannine est certainement subtil. Mais on voudrait que les élèves comprennent qu'ils peuvent aussi enlever des enveloppes pour continuer à simplifier l'équation et ainsi *isoler* l'inconnue.

L'enseignante décide de recommencer le problème et de souligner les éléments clés de la résolution algébrique. Après avoir remis l'équation à son état initial elle dit :

1. **ENSEIGNANTE :** Avant de commencer, qu'est-ce que cette ligne représente? Qu'est-ce qu'il y a de spécial entre le groupe de Paulette et le groupe de Richard? Qu'est-ce qu'il y a de spécial?
2. **JEANNINE :** Ben, ils [le nombre de cartes des deux côtés] sont égaux.
3. **ENSEIGNANTE :** (*en reprenant les mots de Jeannine*) les deux sont égaux. Ça (*elle signale le côté gauche de l'équation*) est égal à ça (*elle signale le côté droit de l'équation*). OK? Raphael, vas-y...
4. **RAPHAEL :** Umm, moi, je ferai... moi, j'ai figuré que c'était 5 cartes dans chaque enveloppe... parce que Paulette a 7 cartes, plus 5 cartes dans l'enveloppe, ça ferait 12. Richard a 2 cartes de son côté, plus 5 de chaque enveloppe, ça ferait 2 plus 10 égale à 12.
5. **ENSEIGNANTE :** OK. Tu es arrivé à la bonne réponse; tu essaies dans ta tête de substituer les enveloppes à des cartes, puis tu es arrivé à la bonne réponse.

Raphael suggère d'utiliser la méthode d'« essais systématiques ». Dans un problème simple, elle donne de bons résultats. Mais son utilisation est très limitée. On peut penser, par exemple, à un problème où la réponse serait un nombre décimal tel que 2,329. Trouver cette réponse serait virtuellement impossible. L'enseignante doit maintenant prendre une décision délicate. Elle ne veut pas simplement *montrer* la méthode aux élèves. Cela serait tomber dans l'enseignement traditionnel, où l'enseignante ou l'enseignant montre aux élèves comment faire et les élèves ne font que reproduire.

Elle revient alors en soulignant l'idée que l'égalité se conserve si on enlève des nombres égaux de chaque côté de l'équation.

6. **ENSEIGNANTE :** Je vais reprendre les étapes. Je pense que c'est Maria qui m'a suggérée comment faire. (voir Figure 2, gauche) J'enlève deux [cartes] là; j'enlève deux [cartes] là. Êtes-vous d'accord que j'ai enlevé la même chose de chaque côté? (voir Figure 3, gauche)
7. **ÉLÈVES :** Oui.

8. **ENSEIGNANTE** : Les côtés sont égaux. Qu'est-ce qui arrive si je fais ça? (elle enlève une enveloppe de chaque côté) Est-ce que j'ai enlevé la même chose? (voir Figure 3, droite)
9. **ÉLÈVES** : Oui.
10. **ENSEIGNANTE** : Chaque côté est encore égal [à l'autre]? Là, je vous repose la question. Combien de cartes contient chaque enveloppe? Rose?
11. **ROSE** : Cinq.
12. **ENSEIGNANTE** : Cinq. Elle a cinq cartes, lui a une enveloppe, il a encore la même chose parce que j'ai enlevé la même chose à chaque fois. L'enveloppe contient cinq cartes.



Figure 3. À gauche, l'enseignante enlève deux cartes de chaque côté de l'équation. À droite, elle enlève une enveloppe de chaque côté. Sur le tableau, il y a maintenant cinq cartes à gauche et une enveloppe à droite.

L'enseignante a réussi à faire ressortir deux idées clés de la méthode algébrique : on peut enlever le même nombre de cartes et le même nombre d'enveloppes de chaque côté de l'équation. On remarquera qu'elle insiste sur ce qui justifie la réponse : à la ligne 12, elle dit : « ...parce que j'ai enlevé la même chose à chaque fois. » *C'est le principe algébrique de conservation de quantités.*

L'enseignante a par la suite discuté avec les élèves de la façon dont on peut dessiner la procédure de résolution. Dessiner la procédure est une étape vers l'abstraction : à la place de résoudre l'équation à l'aide des actions concrètes sur le matériel de manipulation, on doit *dessiner* les actions.

À la suite de cette discussion générale d'introduction, les élèves étaient prêts à travailler en petits groupes de façon autonome. Dans la section qui suit, nous allons voir quelques extraits de leur travail.

## La résolution d'équations à l'aide du matériel de manipulation

Voici un des problèmes que les élèves devaient résoudre :

La mère de Mat et de Matik décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe.

Mat avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.

Matik avait déjà 3 cartes et sa mère lui donne 3 enveloppes.

Maintenant les 2 enfants ont le même nombre de cartes de hockey.

Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

Les élèves ont modélisé l'équation sans problème. Voici la discussion d'un des petits groupes, le groupe de Sylvain (assis à gauche), Véronique (assise au centre) et Pierre (assis à droite). Les quantités de Matik sont disposées sur le pupitre de Sylvain (pupitre à gauche) et celles de Mat, sur le pupitre de Pierre (pupitre à droite).

13. **SYLVAIN :** Pierre, enlève 3 cartes.
14. **PIERRE :** Il [Mat] enlève 1 carte, une autre carte et encore une autre carte (voir Figure 4, gauche) [...]
15. **SYLVAIN :** Toi, tu enlèves une enveloppe et moi, j'enlève une enveloppe (voir Figure 4, milieu et droite).
16. **VÉRONIQUE :** Combien de cartes y a-t-il dans chaque enveloppe?
17. **SYLVAIN :** Il y a 2 cartes dans chaque enveloppe.



Figure 4. À gauche, Sylvain et Pierre ont enlevé 3 cartes et les ont placées sur le pupitre de Véronique. Au centre, Sylvain enlève une enveloppe. À droite, Pierre enlève à son tour une enveloppe. Sur un côté de l'équation, il reste alors 2 enveloppes et sur l'autre côté, 4 cartes.

Une fois l'équation initiale établie, les élèves ont mis environ 30 secondes à la résoudre. Après, ils ont dessiné la procédure. La Figure 5 montre le dessin de la copie de Véronique.

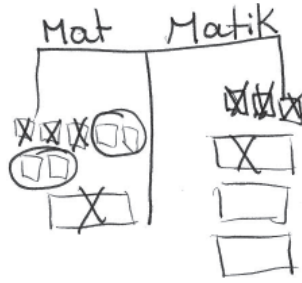


Figure 5. Le dessin de la procédure de résolution de Véronique.

## Vers une deuxième abstraction

Nous avons mentionné précédemment que le dessin de la procédure exige une première abstraction. En déplaçant les objets, les élèves effectuent des actions concrètes. L'équation se simplifie progressivement, jusqu'à aboutir à une équation dont les enveloppes se trouvent isolées. Le dessin ne permet pas la même flexibilité : on ne peut pas enlever les objets. Alors, pour signifier qu'on enlève quelque chose, les élèves barrent les objets en question.

Dans le problème 4, nous avons demandé aux élèves d'expliquer, dans leurs propres mots, les étapes qu'on doit suivre pour résoudre une équation. Il y a ici une autre abstraction importante, car l'équation n'est pas donnée. Il s'agit d'une équation *quelconque*, similaire à celles que les élèves ont rencontrées précédemment. Le passage à ce nouveau niveau d'abstraction a présenté quelques difficultés, mais les élèves ont fini par les surmonter. Voici un extrait de la discussion du groupe de Véronique.

18. **SYLVAIN :** Tu enlèves le même montant de cartes... Attends, non, non, non. Tu enlèves les cartes du plus... faut que tu enlèves le même nombre de cartes de la personne qui en a le moins.
19. **PIERRE :** Oui.
20. **SYLVAIN :** Puis après ça, tu ôtes une enveloppe sur chaque bord [...]
21. **PIERRE ET VÉRONIQUE :** Enlève.
22. **SYLVAIN :** Tu enlèves les cartes de la personne qui en a le moins, jusqu'à ce qu'il ne reste que deux enveloppes.
23. **VÉRONIQUE :** Pourquoi jusqu'à ce qu'il ne reste que deux enveloppes?
24. **SYLVAIN :** Ben, jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'enveloppes.
25. **PIERRE :** Jusqu'à ce qu'il n'en reste plus. [...]
26. **VÉRONIQUE :** Enlève le même montant de cartes et d'enveloppes sur les deux côtés...

27. **PIERRE :** Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'enveloppes et de cartes sur un côté ou l'autre.
28. **SYLVAIN :** Non, non, non, non, non. Non, non, non, non, non. Ça ne fait pas de sens!

Alors que résoudre une équation particulière, comme celle vue à la section précédente, ne pose pas de problèmes, expliquer la méthode de résolution, en général, est loin d'aller de soi. Mais cet effort est nécessaire pour que les élèves atteignent une compréhension plus profonde de la méthode algébrique. Cette compréhension deviendra importante lors du passage au symbolisme. Mais revenons à la discussion des élèves et voyons comment ils ont continué à raffiner les idées. Puisqu'ils ne se mettaient pas d'accord sur la façon d'exprimer la méthode générale de résolution, les élèves ont refait le problème de Mat et Matik. Ils sont donc revenus au concret. Après, ils ont recommencé leur discussion comme suit :

29. **PIERRE :** Tu enlèves le même montant de cartes et d'enveloppes, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'enveloppes ou de cartes... jusqu'à ce qu'il n'aille plus d'enveloppes.
30. **SYLVAIN :** Non Pierre. Jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cartes sur un côté et sur l'autre côté [...]
31. **VÉRONIQUE :** C'est compliqué!

Après d'autres moments de discussion, les élèves ont écrit leur réponse. Voici celle de Véronique.

Tu enlèves le même montant de cartes sur chaque côté [jusqu'à ce qu'il] n'y en ait plus. Après tu enlèveras le même montant d'enveloppes jusqu'à ce qu'un côté n'en ait plus. Tu divises le montant de cartes par le montant d'enveloppes (p. ex., si tu as 100 cartes, puis 4 enveloppes, tu feras  $100 \div 4$  qui te donnera 25 cartes dans chaque enveloppe).

## Le passage au symbolisme algébrique

Le lendemain, les élèves ont utilisé des équations en lettres pour résoudre les problèmes de la veille et d'autres problèmes.

L'enseignante a commencé par une discussion sur la façon d'écrire en symboles algébriques l'équation de Mario et Chantal (problème 2). Ce problème était le suivant :

La mère de Mario et de Chantal décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe.

Mario avait déjà 12 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe.

Chantal avait déjà 3 cartes et sa mère lui donne 4 enveloppes.

Chantal a le même nombre de cartes de hockey que Mario.

Combien y a-t-il de cartes dans chaque enveloppe?

Voici un extrait de la discussion menée par l'enseignante :

32. **ENSEIGNANTE :** (*en s'adressant à la classe*) On se base encore sur la leçon d'hier, mais on avance. Vous n'avez plus d'enveloppes, vous n'avez plus de cartes. Allez au problème numéro deux sur vos feuilles. Là, je vous demande de représenter cette situation, mais d'une autre façon, parce qu'on n'a plus de matériel. Je veux que vous utilisiez des symboles mathématiques pour représenter la même chose. Pierre?
33. **PIERRE :**  $x$  puis  $y$ .
34. **ENSEIGNANTE :** OK, pourquoi tu utilises  $x$  et  $y$ ?
35. **PIERRE :** Bien,  $x$ , ça pourrait signifier le nombre de cartes, puis  $y$ , ça pourrait être les enveloppes!
36. **ENSEIGNANTE :** OK. Est-ce qu'on a besoin de  $x$  pour représenter le nombre de cartes? Quand est-ce qu'on met un  $x$  habituellement? Ginette?
37. **GINETTE :** Une inconnue.
38. **ENSEIGNANTE :** Mais est-ce que les cartes, c'est inconnu? (*les élèves répondent non*) Non, parce qu'on nous dit que Mario a 12 cartes, puis on sait que Chantal en a trois. Donc, on n'a pas besoin d'utiliser le  $x$  pour le nombre de cartes. Jane?
39. **JANE :** Tu mets le nombre de cartes, comme Mario en a 12, plus une enveloppe.
40. **ENSEIGNANTE :** OK, donc on va commencer avec les douze cartes de Mario (*elle écrit 12 au tableau*). [...] Est-ce qu'on connaît le nombre de cartes qui est à l'intérieur des enveloppes? (*les élèves répondent non*) Non. Mais, si je mets juste un « 1 », là, c'est comme dire que j'ai douze cartes, plus une autre carte, mais ce n'est pas ça. J'ai une enveloppe qui a des cartes à l'intérieur. Mais je ne connais pas ce nombre de cartes là. Donc, Ginette?
41. **GINETTE :** Tu peux mettre 12, plus comme  $y$  ou  $x$ ?
42. **ENSEIGNANTE :** On va utiliser  $n$ , OK?  $n$ , ça représente quoi?

43. **GINETTE** : L'enveloppe?
44. **ALINE** : Le nombre de cartes dans l'enveloppe!
45. **ENSEIGNANTE** : Le nombre de cartes dans l'enveloppe! Le  $n$  représente le nombre de cartes à l'intérieur. On va utiliser une lettre, parce qu'on ne sait pas le nombre encore. OK, je continue (*elle écrit au tableau*). Ça, c'est Mario? (*elle pointe sur l'équation au tableau :  $12 + 1n$* ). On va aller à Chantal. Chantal, elle? Véronique?
46. **VÉRONIQUE** : Ça serait 3 plus  $4n$ ?
47. **ENSEIGNANTE** : (*elle écrit au tableau*) trois, parce que c'était trois cartes. Quatre, parce qu'elle avait quatre enveloppes [...] Là, il manque quelque chose. (*elle a écrit  $12 + 1n$  et  $3 + 4n$  au tableau*) Il manque quelque chose entre les deux.
48. **JANE** : Bien, égal, puisque  $12 + 1n$  est égal à  $3 + 4n$ .

Cet extrait relativement long montre bien le cheminement progressif au cours duquel les élèves prennent conscience de la façon dont on écrit une équation en symboles algébriques. La première idée des élèves est d'utiliser des lettres pour exprimer le nombre de cartes et le nombre d'enveloppes. Aux lignes 36 à 38, l'enseignante fait remarquer que le nombre de cartes est connu et qu'on n'a pas besoin d'une lettre pour le représenter. En algèbre, les lettres sont réservées aux inconnues.

Vient ensuite le choix de la lettre et de sa signification. À la ligne 42, l'enseignante dit : « : On va utiliser  $n$ , OK?  $n$ , ça représente quoi? ». Un élève répond que  $n$  représente le nombre d'enveloppes. Or, ce n'est pas cela. La lettre  $n$  représente le nombre de cartes dans une enveloppe. C'est ce que l'enseignante clarifie à la ligne 45, à la suite de l'intervention d'Aline à la ligne 44. Peu à peu, à la suite d'un travail très fin de la part de l'enseignante, l'équation émerge :  $12 + 1n = 3 + 4n$ . L'épisode finit avec la discussion de la résolution de cette équation.

À l'instar de la veille, les élèves ont travaillé en petits groupes. Ils devaient mettre en équation et résoudre le problème de Mat et Matik. Même si le problème avait déjà été résolu à l'aide du matériel de manipulation, penser sa solution en lettres, c'est-à-dire grâce au symbolisme algébrique, n'est pas allé de soi : le résoudre à l'aide du matériel de manipulation a pris moins que 30 secondes. Le résoudre avec des lettres a pris plus de 5 minutes...

Voici un extrait du groupe de Véronique :

49. **VÉRONIQUE** :  $n$  est égal au nombre de cartes dans l'enveloppe?
50. **SYLVAIN** : Ouin,  $n$  est égal au nombre de cartes dans l'enveloppe [...]
51. **SYLVAIN** : 7 plus 1, 7 plus  $n$  [...]
52. **VÉRONIQUE** : Est égal à 3 plus  $3n$ .

53. **PIERRE et SYLVAIN :** Ouen (*ils finissent d'écrire l'équation*; voir Figure 6, ligne 1) [...]
54. **SYLVAIN :** Après ça, on va faire un petit moins... moins trois.
55. **PIERRE :** 7... moins 3, plus un  $n$ . Puis 3 moins petit 3... plus  $3n$  (voir Figure 6, ligne 2).
56. **SYLVAIN :** OK, là après ça, on va faire 4 plus  $n$ .
57. **VÉRONIQUE :** 4 plus  $n$  est égal à  $3n$  (voir Figure 6, ligne 3) [...] Là, on ferait 4 plus  $n$ , moins 1, est égal à...
58. **SYLVAIN :** (*interrompt*) Ouin, le petit  $n$  là, après ça, on va faire un petit moins 1.
59. **VÉRONIQUE :** 3 plus  $n$  moins 1.
60. **PIERRE :** Petit 1 en haut (voir Figure 6, ligne 4).

$$\begin{array}{l}
 7 + 1n = 3 + 3n \\
 7^3 + 1n = 3^3 + 3n \\
 4 + 1n = 3n \\
 4 + 1n^1 = 3n^1
 \end{array}$$

Figure 6. L'équation écrite par Pierre et les premières étapes de la solution.

Lors de la discussion générale, l'enseignante et les élèves avaient convenu que les actions de soustractions seraient écrites à l'aide de petits nombres, placés légèrement en haut. L'enseignante est venue voir le travail du groupe de Pierre, quand le groupe terminait d'écrire la ligne 4. Elle a remarqué que l'écriture pouvait porter à confusion. En s'adressant à Pierre, elle dit :

61. **ENSEIGNANTE :** Qu'est-ce que tu as écrit là, Pierre? Est-ce que c'est... Qu'est-ce que tu enlèves (*elle pointe le petit 1 du côté droit de l'équation*; voir Figure 7, gauche)?
62. **PIERRE :** Une enveloppe.
63. **ENSEIGNANTE :** OK, mais qu'est-ce que tu enlèves? Le moins 1, là? Qu'est-ce que le moins 1 représente?
64. **PIERRE :** Oh! Un  $n$ . J'ai oublié.
65. **SYLVAIN :** T'enlèves une enveloppe (*Pierre ajoute le petit  $n$* ; voir Figure 7, centre, ligne 4) [...]
66. **VÉRONIQUE :** OK, là, après ça, ça serait...
67. **SYLVAIN :** 4 est égal... à  $2n$  (Figure 7, centre, ligne 5). Puis, là, non, non, non!
68. **PIERRE :** Oui!
69. **SYLVAIN :** Non, non, non, non! 4 divisé par... [...]
70. **VÉRONIQUE :** Là, après, on ferait 4 divisé par 2 est égal...

71. **SYLVAIN :** Eh? Woah! Minute là [...] 4 est égal à  $2n$ . Vois-tu là? [...]
72. **VÉRONIQUE :** 4 divisé par 2 est égal à  $2n$  divisé par...
73. **SYLVAIN :** Whoa, whoa, whoa, whoa.
74. **VÉRONIQUE :** Non, là, ça ferait pas de sens.
75. **SYLVAIN :** 4 divisé par  $2n$  [...]
76. **VÉRONIQUE :** 4 divisé par 2, est égal à  $2n$  divisé par 2 (Figure 7, centre, ligne 6) [...]
77. **SYLVAIN :** Exactement,  $2n$  divis... non, non, 4 divisé par  $2n$ .
78. **PIERRE :** Ah! J'ai oublié de diviser quelque chose.
79. **SYLVAIN :**  $2n$  divisé par 2. Ah, non. Ah, oui [...]
80. **VÉRONIQUE :** 2 est égal à  $1n$  (Figure 7, centre, ligne 7)
81. **SYLVAIN :** Tu mets un petit signe d'égal, puis c'est égal à deux cartes dedans chacun.
82. **PIERRE :** Oui, c'est ça. 2 est égal à  $1n$ . Deux cartes dans une enveloppe.
83. **SYLVAIN :** Dans chaque enveloppe.
84. **PIERRE :** Oui. Ah!
85. **SYLVAIN :** Man, mon brain est en train de travailler fort cette fois ici, eh? (*ils rient pendant un moment*; Figure 7, droite).

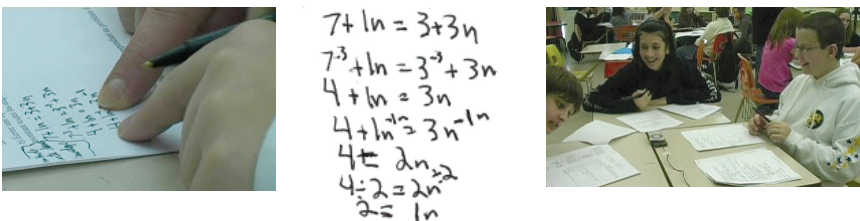


Figure 7. À gauche, l'enseignante attire l'attention de Pierre sur l'exactitude de l'écriture de l'équation. Au centre, ligne 4, Pierre corrige l'écriture. Le reste de la solution se trouve aux lignes 5 à 7. À droite, Sylvain dit que son cerveau a travaillé fort lors de la résolution symbolique de l'équation, ce qui amuse ses compagnons d'équipe.

Le discours des élèves navigue maintenant sur des eaux très abstraites. Il est intéressant de remarquer l'absence de mots contextuels lors de la résolution de l'équation. S'il est vrai qu'aux lignes 49 et 50 (c'est-à-dire aux lignes qui correspondent à la traduction du problème en équation symbolique), on trouve encore des références aux cartes et aux enveloppes, ces termes disparaissent dans les lignes suivantes, pour n'émerger que rapidement à la ligne 65, quand il a été nécessaire de revenir sur la signification du « moins 1 ». Le contexte revient à la fin, quand il faut réinterpréter la réponse.

À la fin de la deuxième journée, les élèves ont apporté avec eux un devoir à faire à la maison (voir en annexe).

Voici les solutions aux deux premiers problèmes du devoir de Jane :

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } 2n + 4 = n + 12 \\
 2n + 4 - 4 = n + 12 - 4 \\
 2n = n + 8 \\
 2n - n = n + 8 - n \\
 n = 8
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \text{b) } 3n - 4 = n + 10 \\
 3n - 4 + 4 = n + 10 + 4 \\
 3n = n + 14 \\
 3n - n = n + 14 - n \\
 2n = +14 \\
 2n : 2 = 14 : 2 \\
 n = 7
 \end{array}$$

Figure 8. Deux problèmes donnés en devoirs, après deux périodes d'étude des équations<sup>12</sup>.

## D'autres équations

La progression des élèves vers l'abstraction mathématique ne s'est pas arrêtée là. Le lendemain, les élèves ont abordé des équations sans contexte, c'est-à-dire des équations données sous forme de symboles. On a commencé cette troisième période par une révision du devoir. Par la suite, les élèves ont travaillé en petits groupes.

Deux problèmes qu'ils devaient aborder étaient les suivants :

- $7n + 2 = 6n + 8$
- $2x + 3 = x + 5$

Le premier problème a été résolu sans difficultés. Mais le deuxième problème a suscité des discussions autour de la signification de la lettre  $x$  :

86. **VÉRONIQUE** : Là, les  $x$ , ils vont valoir encore les enveloppes.
87. **PIERRE** : Oui.
88. **SYLVAIN** : Non, il faut qu'on... il faut qu'on découvre, c'est quoi la valeur de  $x$ .
89. **VÉRONIQUE** : C'est les enveloppes.
90. **PIERRE** : C'est inconnu.
91. **SYLVAIN** :  $2x$ , ça veut dire, 2 fois quelque chose, plus 3 est égal à, quelque chose plus 5.
92. **VÉRONIQUE** : Fois quelque chose?
93. **PIERRE** : Non, il a,  $x$ ,  $x$  c'est comme  $n$ .
94. **SYLVAIN** : Non.

<sup>12</sup> On notera que, dans l'équation b), l'élève oublie d'écrire  $1n = 7$  dans la dernière ligne. Mais le sens du nombre « 1 » est clair. Il s'agit de la valeur de l'inconnue : «  $1n = 7$  ».

95. **PIERRE :**  $n$  c'était le nombre d'enveloppes  
 96. **SYLVAIN :**  $n$  c'était des enveloppes, fallait qu'on découvre qu'est-ce qu'il y avait dans les enveloppes.  
 97. **PIERRE :** Bien, là, imagine que le  $x$ , c'est des enveloppes.  
 98. **SYLVAIN :** Bien, c'est pas... c'est pas de...  $n$ .  
 99. **PIERRE :** Bien, on n'a juste qu'à imaginer!  
 100. **SYLVAIN :** Ben, on ne peut pas imaginer en maths!  
 101. **VÉRONIQUE :** C'est la même chose, juste, qu'à la place de  $n$ , on a dit  $x$ .

Les élèves se sont finalement mis d'accord pour dire que  $x$  pouvait représenter d'autres choses que l'inconnue dans le contexte d'enveloppes. La solution de Véronique apparaît dans la Figure 9.

$$\begin{array}{l}
 \text{b) } 2x+3 = x+5 \\
 2x - 1x + 3 = x - x + 5 \\
 x + 3 = 5 \\
 x + 3 - 3 = 5 - 3 \\
 x = 2
 \end{array}$$

Figure 9. Solution de l'équation sans contexte où l'inconnue est représentée par la lettre  $x$ .

## Synthèse

Au chapitre 2, nous avons énoncé quelques caractéristiques de leçons qui favorisent l'apprentissage des mathématiques et le passage à l'abstrait.

La séquence des leçons vues dans ce chapitre rencontre ces conditions. En particulier, on a pu voir l'importance d'utiliser un contexte familier aux élèves, celui de cartes de hockey et de cartes qu'on met à l'intérieur de quelques enveloppes. On a également pu voir l'importance du matériel de manipulation. Le contexte et le matériel de manipulation ont permis aux élèves de commencer à effectuer des raisonnements algébriques complexes à un niveau relativement concret. Ajoutons que l'organisation du travail en petits groupes a favorisé l'échange des idées et leur raffinement.

À ces trois éléments (contexte, matériel de manipulation et travail en groupe) s'ajoute le choix judicieux des problèmes. Les problèmes ont été énoncés de telle sorte qu'ils font appel aux concepts algébriques visés. Bien sûr, les problèmes posés pouvaient aussi se résoudre par des méthodes arithmétiques, ce qu'on voulait précisément éviter (c'est-à-dire les méthodes par essais systématiques). C'est justement là que l'enseignante a joué un rôle très important. On a vu comment, à l'aide de questions précises, elle a su amener les élèves vers les concepts algébriques visés. Les discussions générales devant la classe ont permis aux élèves de comprendre d'autres manières plus directes et efficaces de résoudre les problèmes posés.

La clé du succès de la séquence d'enseignement a été l'*unité conceptuelle*, c'est-à-dire une gradation progressive du niveau de difficulté des problèmes donnés aux élèves. Dans les chapitres précédents, nous avons mentionné qu'il est inexact de croire que la pensée mathématique peut se développer chez l'élève grâce à la solution de problèmes sans fil conducteur. Munir les problèmes d'un fil conducteur, les rendre cohérents autour d'un thème qui devient de plus en plus complexe, est un point important de l'enseignement des mathématiques.

Dans les chapitres qui suivent, nous reviendrons sur ces points. Mentionnons, pour conclure, que cette expérience d'introduction des concepts algébriques en 7<sup>e</sup> année, suggère, de façon claire, que nous pouvons présenter aux élèves des résolutions d'équations par des méthodes algébriques beaucoup plus tôt qu'il est proposé dans le *Curriculum de l'Ontario*. On peut naturellement utiliser l'approche esquissée ici en 9<sup>e</sup> année. Mais, à la lumière de notre recherche ainsi que de celles menées par d'autres chercheurs aux États-Unis, en Australie et en Italie, on peut se demander si le fait de commencer à résoudre des équations par des méthodes algébriques trop tard ne vient pas nuire à l'apprentissage. Il se peut que les méthodes arithmétiques s'ancrent trop profondément chez l'élève au point d'en constituer un obstacle pour l'apprentissage de l'algèbre en 9<sup>e</sup> année.

## Travaux cités et lectures supplémentaires



- Brizuela, B., and A. Schliemann (2004). "Ten-year-old students solving linear equations", *For the Learning of Mathematics*, 24(2), p. 33-40.
- Carraher, D., A. Schliemann and B. Brizuela (2001). "Can young students operate on unknowns?", in M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, Utrecht University, The Netherlands, p. 130-140.
- Filloy, E., L. Puig and T. Rojano (2007). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*, New York, Springer Verlag.
- Radford, L. (2002). "Algebra as tekhnē. Artefacts, symbols and equations in the classroom", *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(1), p. 31-56.
- Radford, L. (2008). "Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts", *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), p. 83-96.
- Radford, L., et M. Grenier (1996). « Entre les idées, les choses et les symboles. Une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre », *Revue des sciences de l'éducation*, 22, p. 253-276.

- Rossi Becker, J., and F. Rivera (2006). "Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra", in S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz and A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, Mérida, Mexico, Universidad Pedagógica Nacional, p. 95-101.
- Rossi Becker, J., and F. Rivera (2006). "Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level", in J. Novotná, H. Moraová, M. Krátkná and N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, Prague, Czech Republic, p. 465-472.