

## CHAPITRE 6

### La communication en mathématiques au cycle moyen



#### Plan du chapitre

1. Introduction
2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle moyen
3. Mise en place et gestion de la communication au cycle moyen
4. Un exemple de salle de classe : les fractions équivalentes
5. Survol et synthèse générale de l'exemple
6. Pistes supplémentaires pour réussir la communication
7. Pour en savoir plus...

## 1. Introduction

Supposons que nous entrons dans une classe dont nous ignorons l'année d'études et que, en ouvrant la porte, nous entendons la discussion suivante entre trois élèves :

1. **ÉLÈVE 1 :** Ça, c'est Isabelle. Elle en a 4 sur 12... donc ça, c'est Isabelle. Il y en a 4 sur 12... Tu peux les mettre tous les trois... ça fait un tiers.
2. **ÉLÈVE 2 :** *(D'un ton peu convaincu, il dit :) Ouié...*
3. **ÉLÈVE 3 :** Non, ça, c'est un entier!
4. **ÉLÈVE 1 :** Non, il y en a trois.
5. **ÉLÈVE 3 :** Il y a trois tiers!
6. **ÉLÈVE 1 :** C'est trois tiers...?
7. **ÉLÈVE 3 :** Ça, c'est un tiers! *(Elle prend un objet de la table et, en le gardant dans sa main, elle le montre à l'élève 1.) (voir Figure 1)*
8. **ÉLÈVE 1 :** Avec tout ça... (cela) fait un entier.
9. **ÉLÈVE 3 :** Exactement! Puis, ça, c'est un tiers!
10. **ÉLÈVE 1 :** Là, ça, c'est Isabelle.
11. **ÉLÈVE 2 :** Il en reste huit.
12. **ÉLÈVE 3 :** *(En s'opposant aux propos précédents, elle dit avec force :) Isabelle?... c'est pas comme ça!*



Figure 1. L'élève 3 (à gauche) montre un objet à l'élève 1 (à droite), qui prend deux autres objets verts et les garde dans sa main gauche (lignes 7 et 8).

Après avoir ouvert la porte et écouté un petit moment ce groupe, le moins que l'on puisse dire, c'est que les élèves ne se mettent pas d'accord. Mais ce qui frappe le plus, c'est que, si nous comparons cette discussion à celles analysées aux chapitres précédents, on constate que celle-ci a une allure plus sophistiquée. Nous voyons les filles tenir, avec grande conviction, des propos mathématiques. Nous les voyons aussi s'opposer de façon ferme aux propos de l'autre. À des oppositions ouvertes, exprimées par une assertion négative (lignes 3, 4 et 12), s'ajoutent des oppositions plus subtiles, formulées dans une argumentation qui fait appel, au besoin, à de petits objets colorés qui sont sur la table et qui, aux yeux d'un observateur externe, semblent chargés d'un pouvoir de preuve extraordinaire.

Il y a un autre élément important à noter. On aurait pu rester là, devant les élèves, à écouter toute la discussion et, fort probablement, on n'aurait pas pu déterminer à coup sûr le problème dont ils discutaient. Le contenu conceptuel de l'argumentation est plus complexe que celui auquel nous avons eu affaire aux chapitres précédents.

Or, quelle est la relation entre la complexité conceptuelle et la finesse argumentative que ces élèves semblent avoir atteintes ici et que nous n'avons pas retrouvées chez les élèves plus jeunes aux chapitres précédents? Est-ce parce qu'ils ont appris de nouveaux concepts qu'ils discutent mieux? Ou bien devrait-on affirmer le contraire, à savoir que c'est le développement des compétences discursives qui entraîne un plus grand développement conceptuel?

Au chapitre 1, nous avons proposé le « principe d'interdépendance cognitive » entre concept et raisonnement. Un niveau conceptuel plus élevé, avons-nous dit, exige la mise en œuvre de modes de raisonnements et d'argumentations plus raffinés. En contrepartie, des arguments plus détaillés dévoilent des caractéristiques plus profondes ou nouvelles du concept en question.

Il fut un temps, pas très lointain d'ailleurs, où l'on crut que l'enseignement de la logique en tant que telle allait conduire à un apprentissage plus substantiel des concepts enseignés à l'école. Toutes ces tentatives se sont soldées par un grand échec. Il a fallu quelque temps encore pour réaliser ce qui pourtant avait déjà été objet de litiges au XVIII<sup>e</sup> siècle : un raisonnement ne peut pas être conduit sans prendre appui sur des objets précis. Enlever au raisonnement ses objets et le réduire à sa seule « forme » peut être un exercice intellectuel intéressant, mais il s'avère être de peu d'utilité du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage.

Il fut un temps aussi où l'on prit le chemin inverse : sous la pression intense de l'empirisme, on a mis l'accent sur les objets eux-mêmes, en espérant qu'en les touchant et en les rendant concrets, leur aspect conceptuel allait sauter aux yeux des élèves. L'échec n'a pas été moindre que dans le cas précédent.

Plusieurs théories du développement fournissent encore une autre réponse à la question que nous avons soulevée : ce n'est ni l'activité discursive qui entraîne un plus grand niveau de développement cognitif, ni le développement cognitif qui entraîne une activité discursive plus fine, car tous les deux dépendent d'un troisième facteur : la maturation. Ces théories considèrent la maturation comme une sorte de programme qui serait inscrit au plus profond de notre code génétique. D'après ces théories, le milieu externe ne peut avoir aucune influence sur le développement. De plus, on ne peut apprendre que ce que permet le niveau de la maturation à ce stade. Selon ces théories, l'apprentissage est complètement assujéti à un développement qui suit le chemin inexorable que son destin biologique lui a fixé.

Toutefois, en étudiant le développement du sens du toucher chez de jeunes enfants, le psychologue allemand Kurt Koffka a pu montrer que, sous certaines conditions, il y a une amélioration qui ne peut pas être attribuée à la seule maturation sensorimotrice. Au moment de la répétition d'un mouvement, par exemple, un véritable apprentissage peut avoir lieu, et cet apprentissage peut modifier le développement. Ainsi, Koffka a pu mettre en évidence que, s'il est vrai que le développement dépend de la maturation, cela ne signifie pas pour autant qu'il en dépend de façon exclusive. D'une part, le système nerveux de l'enfant doit avoir atteint un certain niveau de maturation avant que l'enfant puisse réagir à certaines situations de façon appropriée. Mais, d'autre part, certains apprentissages viennent se greffer sur la maturation et permettent d'atteindre des réussites plus amples. En faisant référence au développement du sens du toucher et de la préhension chez l'enfant, Koffka dit : « L'histoire de ce processus révèle une interaction très serrée entre maturation et apprentissage... La maturation ne doit pas être prise comme un processus qui se déploie indépendamment de l'apprentissage<sup>31</sup>. » La maturation fait progresser l'apprentissage et, en retour, l'apprentissage fait progresser la maturation.

Comme Vygotski l'a remarqué, Koffka a eu le mérite d'être allé plus loin que les conceptions biologiques du développement et que les conceptions associationnistes (qui, elles, soutenaient que l'apprentissage et le développement étaient exactement la même chose). Mais force est d'avouer qu'il n'a pas spécifié la nature de la relation entre apprentissage et développement. Le concept de *zone proximale de*

<sup>31</sup> K. Koffka. (1931). *The Growth of the Mind. An Introduction to Child-Psychology*. New York: Harcourt, Brace & Co. p. 279-80.

*développement* de Vygotski, que nous avons mentionné au chapitre 3, fournit une explication. Les situations et les problèmes se situant dans la zone proximale de développement s'appuient sur le développement présent des fonctions psychologiques de l'enfant et offrent à ces fonctions la possibilité d'atteindre un niveau qui n'était, jusqu'alors, qu'à l'état potentiel. C'est pourquoi « le seul apprentissage valable pendant l'enfance est celui qui anticipe sur le développement et le fait progresser. » (Vygotski, *Pensée et langage*, p. 273). C'est pour cette même raison qu'« enseigner à l'enfant ce qu'il n'est pas capable d'apprendre est aussi stérile que de lui enseigner ce qu'il sait déjà faire tout seul. » (Vygotski, *Pensée et langage*, p. 277).

L'activité discursive de salle de classe, telle que nous la concevons ici, permet d'accomplir les transformations qui mènent à de nouveaux développements à l'intérieur de la zone proximale de développement de l'élève. Dans l'épisode mentionné ci-dessus, où nous voyons trois élèves discuter d'un problème mathématique, l'activité discursive mobilise, à la fois et de façon dialectique, des raisonnements plus fins et des concepts plus abstraits. Bien sûr, il ne suffit pas de poser un problème dans la zone proximale de développement pour que le principe de la relation d'interdépendance entre concept et raisonnement se mette en œuvre. On ne lance pas un problème dans la zone proximale de développement comme on lance une pierre dans l'eau calme d'un lac. Justement, la caractéristique fondamentale de la zone proximale de développement est d'être sociale. Cela signifie que, loin d'être innées, les formes de raisonnement mathématiques s'acquièrent dans l'interaction et dans la discussion avec les autres.

Nous venons de dire que la caractéristique fondamentale de la zone proximale de développement est d'être sociale. En fait, c'est faux. La caractéristique fondamentale de la zone proximale de développement est d'être *culturelle*. Les formes de raisonnement que l'on vise en salle de classe (raisonnements déductifs, probabilistes, algébriques, etc.) dépassent, en effet, la dimension de l'interaction sociale de la salle de classe. Ces formes existent bien avant que l'activité discursive de salle de classe se mette en œuvre. Ce sont des formes de raisonnement historiquement et culturellement constituées qui servent de repère à la direction que prendra le développement de l'enfant grâce aux activités mathématiques dans la salle de classe. Le terrain de l'interaction discursive est sans doute le terrain le plus fertile pour faire comprendre l'intégration du principe de la relation d'interdépendance entre concept et raisonnement. Mais, pour que l'interaction soit efficace, il faut s'assurer que l'interaction et la communication mènent aux conceptualisations et aux raisonnements mathématiques visés. Dans ce contexte, le choix des objectifs qu'on peut se fixer en matière de communication acquiert tout son sens. Or, quels peuvent être ces objectifs pour le cycle moyen?

Pour répondre à cette question, on gardera présent à l'esprit que les efforts pédagogiques, visant à atteindre un niveau souhaitable de compétence en communication, devront assurer une continuité et un approfondissement des développements cognitifs et sociaux déjà entamés au cycle précédent. L'élève du cycle moyen devrait être en mesure d'utiliser une argumentation plus riche qui, sans être aussi sophistiquée que l'argumentation aux cycles intermédiaire et supérieur, ferait appel à plusieurs systèmes de signes (phrases, dessins, tableaux, expressions arithmétiques, etc.). Si, au cycle précédent, des exemples concrets ou des phrases courtes restaient la base de l'argumentation mathématique typique, on cherche ici à amener l'élève à produire des textes argumentatifs plus complexes comportant un plus haut niveau de clarté, de logique et d'efficacité. Dans la section qui suit, nous proposons quelques objectifs que l'on pourra prendre en considération dans l'élaboration d'activités mathématiques de salle de classe.

## 2. Quelques objectifs clés de la communication au cycle moyen

En continuité avec les objectifs du cycle primaire, à la fin du cycle moyen, l'élève doit pouvoir :

1. utiliser les conventions mathématiques correspondantes au cycle moyen;
2. écouter les propos mathématiques de ses pairs;
3. interpréter les arguments mathématiques de ses pairs;
4. évaluer de façon critique les arguments des autres;
5. exprimer des arguments mathématiques appropriés à la situation mathématique en question;
6. présenter des justifications mathématiques des arguments qu'il ou elle avance;
7. améliorer sa connaissance de ce qu'est un argument exact, clair et suffisant;
8. organiser avec logique et efficacité la présentation d'un résultat d'une activité mathématique.

Nous avons mentionné au chapitre 2 que l'objectif 1 relève du critère « Syntaxe et symbole »; les objectifs 2, 3 et 4 relèvent du critère « Considération des arguments et des propos des autres »; les objectifs 5, 6 et 7 relèvent du critère « Engagement au dialogue »; l'objectif 8 appartient au critère « Organisation de la présentation ». Rappelons que, selon le contexte de l'activité, les objectifs 1, 5 et 6 peuvent aussi être inclus dans le critère « Organisation de la présentation ».

Les objectifs énoncés vont se retrouver dans les cycles suivants, où ils seront raffinés et approfondis en fonction des opérations mathématiques apprises par les élèves selon les contenus d'apprentissage du cycle en question, d'une part, et du développement cognitif de l'élève, d'autre part (voir chapitres 7 et 8).

Pour arriver aux objectifs mentionnés, les enseignantes et les enseignants auront avantage à utiliser des activités de salle de classe où la communication apparaît tant dans sa dimension écrite qu'orale. La section ci-dessous donne quelques pistes concrètes d'actions pédagogiques pour soutenir le développement de la compétence Communication chez l'élève.

## 3. Mise en place et gestion de la communication au cycle moyen

Afin qu'une leçon qui mise sur la communication soit bien réussie, il faut qu'elle soit planifiée en tenant compte de certaines conditions.

### Le choix de l'activité mathématique

Insistons encore une fois sur le fait que l'activité mathématique doit être suffisamment complexe pour permettre des interactions intéressantes. Au moment de la planification d'une activité, on ne doit pas oublier que l'activité n'est pas consacrée à la communication seulement. Il est évident que la communication ne peut pas être la seule compétence visée. D'après le principe de l'interdépendance cognitive entre raisonnement et concept, il est clair que la communication facilite l'acquisition des concepts, et qu'elle est présente lorsque les activités exigent de l'élève qu'il collabore avec ses pairs à la résolution de problèmes. Une activité riche visera, par conséquent, plusieurs compétences à la fois.

## La formation judicieuse de groupes

Le cycle moyen apparaît comme un cycle clé dans la consolidation des habiletés sociales de l'élève qui sous-tendent le bon fonctionnement de la communication. C'est pourquoi, si l'on veut une communication réussie, il est absolument nécessaire de créer à l'intérieur de la salle de classe du cycle moyen une culture d'ouverture et d'échange.

Pour mener cette entreprise à terme, on doit avoir présent à l'esprit qu'à la base du travail en groupe se trouve la volonté d'apprendre ensemble et de prendre ses responsabilités.

Il n'y a pas de recette magique pour former les groupes. Des élèves relativement forts peuvent aider les autres élèves à raffiner leur compréhension des mathématiques. En contrepartie, les élèves plus forts, en donnant des explications aux membres de leurs équipes, ont l'occasion de rendre explicite leur propre compréhension, ce qui amène souvent à un niveau plus profond de prise de conscience. Le défi à relever, c'est de s'assurer que l'élève fort ne monopolise pas la parole, qu'elle ou il est capable de comprendre les autres, et d'aller chercher leurs avis. L'enseignante ou l'enseignant devra alors s'assurer que la communication au sein des groupes est toujours ouverte, et que les élèves sont à l'écoute des autres et prêts à s'engager dans le dialogue.

## Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant

Bien que les élèves soient relativement indépendants à cet âge, il ne faut pas croire pour autant qu'ils seront capables de résoudre les problèmes de façon autonome. L'enseignante ou l'enseignant doit être vigilante ou vigilant dans ses interventions et s'assurer que les élèves discutent librement de mathématiques en l'absence de supervision. Il faut donc qu'il y ait une interaction ponctuelle entre l'enseignante ou l'enseignant et chacun des groupes. Dans ses propos avec le groupe, l'enseignante ou l'enseignant peut cibler des questions qui permettront de mesurer la compréhension des élèves et, à partir de là, proposer des défis et suggérer des pistes convenables de recherche.

### 4. Un exemple de salle de classe : les fractions équivalentes

Afin de donner une idée concrète de la façon dont la communication peut être encouragée au cycle moyen, nous allons présenter, dans cette section, des éléments concernant la mise en place et la gestion de la communication dans une classe de cinquième année.

Puisque la compétence Communication ne peut pas se limiter à l'écrit, mais doit aussi inclure la dimension orale, nous avons élaboré une leçon qui permettait aux élèves de travailler en petits groupes sur une activité mathématique divisée en une série de problèmes. La leçon portait sur un thème très classique du domaine Numération et sens du nombre : celui des fractions équivalentes. Nous avons choisi ce thème pour montrer que la communication joue un rôle important même dans les thèmes les plus traditionnels du programme de mathématiques.

Dans le cas de cette leçon, le concept des fractions avait déjà été enseigné, mais celui des fractions équivalentes était nouveau.

L'activité fait appel à la manipulation d'objets concrets : ce sont des parties d'une boîte à œufs (voir Figure 2). La correspondance entre des parties d'une boîte à œufs et la fraction représentée est montrée

sur le tableau 1 ci-dessous. Ces objets concrets médiatisent l'activité (au sens des concepts vus au chapitre 1) en fournissant une forme de représentation des objets mathématiques visés (p. ex., les fractions  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$ ). Ils offrent une voie d'accès au concept de fractions équivalentes. Naturellement, ce matériel ne constitue pas le seul matériel possible pour enseigner les fractions. Il y en a d'autres et aucun – le nôtre y compris – n'est « parfait ». Il n'y a pas de matériel concret qui, dans sa manipulation, mènerait automatiquement au concept concerné. La recherche du matériel de manipulation parfait est aussi vaine que celle de l'élixir de la vie. Nous avons déjà mentionné l'échec des perspectives empiristes en éducation. Ce qui est important de retenir, c'est que le matériel didactique offre aux élèves l'occasion de donner un sens au concept de fractions équivalentes. La production du sens se fait ici à l'intérieur d'une activité perceptuelle et d'une activité symbolique. L'activité perceptuelle demande une interprétation continue du concept de fraction; l'activité symbolique demande de voir chaque petite pièce de la boîte à œufs non pas en tant que telle, mais comme représentation d'une fraction abstraite. L'apprentissage du concept de fraction équivalente se fait dans la jonction de ces deux activités : la symbolique et la perceptuelle, ce qui, bien sûr, ne se fait pas sans difficulté.



Figure 2. Une partie du matériel concret utilisé pour modéliser les fractions.

| Partie de la boîte à œufs | Fraction représentée |
|---------------------------|----------------------|
| 1 alvéole                 | $\frac{1}{12}$       |
| 2 alvéoles                | $\frac{1}{6}$        |
| 3 alvéoles                | $\frac{1}{4}$        |
| 4 alvéoles                | $\frac{1}{3}$        |
| 6 alvéoles                | $\frac{1}{2}$        |
| 12 alvéoles               | 1 entier ou le tout  |

Tableau 1. Correspondance entre les parties de la boîte à œufs et les fractions.

La figure 2 représente une partie du matériel concret qu'on avait mis à la disposition de chacun des groupes d'élèves. Il est à noter que chacune des fractions était représentée par une couleur distincte.

Dans l'introduction à la leçon, l'enseignant a résolu un problème de fractions équivalentes devant la classe, en utilisant un matériel didactique différent des boîtes à œufs (l'enseignant a utilisé les « Pattern

Blocks »). Ensuite, en groupes de trois, les élèves ont répondu à une série de questions. Les élèves devaient produire une explication écrite, claire et précise afin d'indiquer si la situation donnée dans le problème correspondait ou non à des fractions équivalentes. À chacune des étapes, on encourageait les élèves à échanger et à justifier leurs interventions au sein de leur groupe (objectifs 1, 5, 6, 7, 8). On trouvera la leçon complète dans l'annexe, après le chapitre 10.

Pour se conformer au plan de la leçon, une fois que la justification écrite de chacune des questions a été accomplie, on a demandé à chaque groupe de donner sa copie écrite à un autre groupe. Chaque groupe devait alors juger de façon critique et objective les justifications de l'autre groupe et dire si celles-ci étaient claires, précises et facilement compréhensibles. Par la suite, les groupes devaient se rencontrer face à face pour commenter les arguments des autres. À tour de rôle, ils devaient expliquer, de façon respectueuse, ce qu'ils considéraient comme étant les points forts et les points faibles des arguments mathématiques des autres. Chaque groupe pouvait, au besoin, en expliquant la solution aux problèmes donnés, rédiger un texte conjoint fournissant de meilleurs arguments mathématiques que le texte original (objectifs 2, 3, 4, 6, 7 et 8).

Dans ce qui suit, nous illustrons, à l'aide d'une série d'exemples concrets tirés des transcriptions d'élèves, la manière dont : (1) la conception de l'activité mathématique et (2) la gestion de la classe en petits groupes et sa dynamique sociale d'échange d'idées ont permis aux élèves de participer au développement de la compétence Communication.

Les exemples montrent comment la conception de la leçon permet, à des moments différents et avec des intensités variables, d'atteindre les objectifs visés de la compétence Communication énumérés à la section 2 ci-dessus.

Sur un autre plan, les exemples illustrent certaines difficultés conceptuelles liées à l'acquisition du concept de fraction équivalente chez l'élève.

### Engagement au dialogue et considération des arguments des autres

Le court extrait ci-dessous montre la façon dont un élève, Kyle, mobilise des ressources argumentatives pour dissiper une confusion au sujet des fractions. On y voit tant son engagement au dialogue que sa façon de tenir des propos mathématiques. L'extrait provient du début de l'activité, où il s'agit de déterminer si la fraction  $\frac{1}{3}$  correspond à la partie de la boîte à œufs qui a trois alvéoles (comme suggère Sylvie) ou à celle qui a quatre alvéoles.

1. **KYLE :** Regarde! Ça, c'est un quart (*il montre la section rouge; voir Figure 3*), puis ça, c'est un tiers. (*Il montre la section verte; voir Figure 4.*)
2. **SYLVIE :** Quand même? (*Elle n'est pas convaincue.*)



Figure 3. Kyle en train de montrer la partie qui correspond à un quart de la boîte.

**3. KYLE :** C'est le contraire. (*Il se réfère ici à l'inversion entre la valeur du dénominateur et le nombre d'alvéoles comprises dans la fraction. Ainsi :  $\frac{1}{4} = 3$  alvéoles;  $\frac{1}{3} = 4$  alvéoles. Sylvie est d'avis que  $\frac{1}{3} = 3$  alvéoles et  $\frac{1}{4} = 4$  alvéoles.*) Tu comprends?

**4. SYLVIE :** 3 sur 12...

**5. KYLE :** (*Il voit que Sylvie n'est pas convaincue, alors il continue.*) Tu peux en mettre 3 comme ça pour faire 12 (*il prend trois sections vertes contenant 4 alvéoles chacune*), puis il faut que tu en mettes 4 sur 12 (*il montre les sections rouges contenant 3 alvéoles chacune*), donc, c'est un quart. Ça, c'est un tiers (*il montre la section verte*) [...]

**6. ENSEIGNANT :** C'est quoi un quart?

**7. KYLE :** Un quart (*il montre une section rouge : 3 alvéoles*).

**8. ENSEIGNANT :** Ça, c'est un quart (*il montre du doigt la section que Kyle a dans les mains*), c'est quoi un tiers?

**9. SYLVIE :** Un tiers, c'est toute l'affaire. (*elle montre du doigt la douzaine vide*)

**10. KYLE :** (*Il montre la section verte : 4 alvéoles.*)

**11. ENSEIGNANT :** Ça, c'est un tiers. (*il montre de nouveau la section verte que Kyle a dans la main*) Très bien, c'est bien...



Figure 4. Kyle en train de montrer la partie qui correspond à un tiers de la fraction.

On voit donc, dans cet extrait, Kyle et Sylvie discuter de leur interprétation du quart et du tiers lorsque l'entier de base contient 12 alvéoles. À la ligne 5, Kyle présente une preuve mathématique de son idée. Kyle soutient que le tiers correspond à la partie qui a quatre alvéoles. La preuve se fait à l'aide d'objets concrets ainsi qu'au moyen de gestes et de mots tels que *ça* (le mot *ça* apparaît au moins cinq fois dans cet extrait aux fins de désignation d'un référent). Au cours de la preuve, l'activité perceptive devient très importante. Ce n'est pas le nombre d'alvéoles qu'il faut considérer, mais le nombre de fois que la partie va dans le tout.

À la fin du passage cité, le questionnement de l'enseignant montre que Kyle a compris, de façon adéquate, la fraction représentée par les petits objets en carton; Sylvie aura encore à bien distinguer la relation partie-tout qui sous-tend le concept de fraction.

Notons, au passage, que ce court extrait offre un exemple clair du fonctionnement du principe d'interdépendance cognitive entre concept et raisonnement. Le raisonnement sur lequel repose la preuve de Kyle et le concept que véhicule ce raisonnement sont profondément liés.

L'extrait ci-après contient le dialogue rapporté dans l'introduction à ce chapitre. Il provient du groupe formé de Julie, Natasha et Patrick. Le problème dont les élèves discutent est le suivant :

Le dimanche de la fête des Mères, Isabelle et Danielle ont préparé des crêpes aux bananes pour leur maman et les autres membres de leur famille. Le samedi d'avant, chacune d'elles a acheté un gros sac de farine. Pour faire ses crêpes, Isabelle a utilisé  $\frac{4}{12}$  de son sac de farine et Danielle a utilisé  $\frac{1}{3}$  de son sac de farine. En sachant que les sacs de farine sont identiques, est-ce que les fractions de farine utilisées par Danielle et Isabelle sont équivalentes?

La discussion gravite autour de deux points :

- *L'ambiguïté du référent.* Il y a, dès le départ, un malentendu entre Julie et Natasha. La confusion résulte de l'utilisation que fait Julie de l'expression « ça ». Notons que l'expression « ça » est très commune. En effet, elle apparaît très souvent dans toute activité discursive. Son utilisation massive découle du fait que, à l'opposé des noms propres, l'expression « ça » convient à toute une variété d'objets du discours (on pourrait dire qu'elle convient à tout objet placé dans le champ de vision des personnes engagées dans une communication en face à face). Mais, puisqu'elle peut désigner plusieurs objets, elle peut porter à confusion : c'est ce qu'on appelle l'ambiguïté du référent. On verra ce phénomène dans l'extrait ci-dessous. Julie désigne un tiers par le terme « ça ». Natasha pense qu'en utilisant le terme *ça*, Julie fait référence à l'entier.
- *La diversité de représentations d'un objet mathématique.* Sur le plan conceptuel, on verra également que Natasha s'oppose à l'idée de représenter la fraction d'Isabelle par des tiers car, d'après elle, et suivant ce que dit textuellement l'énoncé du problème, Isabelle utilise des douzièmes. Un des éléments centraux de l'apprentissage des mathématiques est justement de pouvoir représenter une même situation par des symboles différents. C'est d'ailleurs là que réside une difficulté clé dans l'acquisition du concept de fractions équivalentes. La communication entre les élèves permettra néanmoins de surmonter peu à peu cette difficulté. Voici l'extrait :

- 12. JULIE :** Ça, c'est Isabelle. (*elle montre du doigt une des sections vertes des boîtes à œufs qui contient quatre alvéoles*) Elle en a 4 sur 12... donc ça, c'est Isabelle. (*elle montre encore une section verte*) Il y en a 4 sur 12... (*Pour montrer que la section verte est en même temps égale à un tiers du tout, Julie place 3 sections vertes ensemble pour former le tout; pendant qu'elle fait cela, elle dit :*) Tu peux les mettre tous les trois (ensemble)... ça fait un tiers.
- 13. PATRICK :** (*D'un ton peu convaincu, il dit :*) Ouié...
- 14. NATASHA :** (*Elle interprète le mot « ça » de la ligne 12 non pas comme référant au tiers, mais à la forme entière, c'est-à-dire au tout; alors, elle corrige Julie. Elle montre les trois sections vertes et dit :*) Non, ça, c'est un entier!
- 15. JULIE :** (*Sans comprendre les propos de Natasha, elle dit :*) Non, il y en a trois. (*Elle compte en montrant chacun des trois tiers.*)
- 16. NATASHA :** Il y a trois tiers!
- 17. JULIE :** C'est trois tiers...? (*Elle ne comprend pas les propos de Natasha.*)

**18. NATASHA :** Ça, c'est un tiers! (Elle enlève deux tiers du tout – c'est-à-dire de l'entier – et les cache à côté d'elle, en en laissant un sur le tout; voir Figure 5.)

**19. JULIE :** Avec tout ça (en montrant les deux tiers que Natasha a cachés à côté d'elle), (cela fait un entier.

**20. NATASHA :** Exactement! Puis ça (elle prononce le mot « ça » avec force), c'est un tiers. (Elle montre la section verte qui reste sur le tout et qu'on voit sur la figure 5, vers la gauche de Patrick.)

**21. JULIE :** (Maintenant que le malentendu est levé, elle revient sur le problème.) Là, ça, c'est Isabelle. (Elle montre de nouveau la section verte qui reste sur la table et qui contient 4 alvéoles.)

**22. PATRICK :** Il en reste huit. (Il compte le nombre d'alvéoles libres dans la douzaine, soit  $12 - 4 = 8$ .)

**23. NATASHA :** Isabelle?... c'est pas comme ça! (Elle n'est pas d'accord, car elle voit un tiers, tandis que le problème dit qu'Isabelle a quatre douzièmes.)

**24. JULIE :** Isabelle, c'est quatre sur 12 donc... un (elle place une section verte - qui contient 4 alvéoles - dans l'entier) il y en a quatre. (Elle se réfère au nombre d'alvéoles vertes; voir Figure 6.)

**25. NATASHA :** Ah oui!... maintenant je suis convaincue. (À ce moment-ci, Natasha commence à comprendre, mais, comme le montre la suite, la compréhension se fait peu à peu.)

**26. PATRICK :** Quoi? (Il semble curieux de savoir ce que Natasha a à dire.)

**27. NATASHA :** J'aime ton idée.

**28. JULIE :** À cause... regarde : c'est quatre... (Elle continue son argumentation en montrant la section verte de 4 alvéoles.)

**29. NATASHA :** ... sur 12. (Elle essaie d'enlever la section verte de la douzaine, mais Julie ne veut pas.)

**30. JULIE :** ... Il faut que tu en mettes trois de même. (en montrant la section verte)

**31. PATRICK :** Ça fait...

**32. NATASHA :** Ça fait tous les douze.

**33. PATRICK :** Oui.

**34. JULIE :** (Elle revient sur l'équivalence entre quatre douzièmes et le tiers; en continuant la phrase interrompue à la ligne 30, elle dit :) un sur trois.



Figure 5. Natasha enlève deux tiers avec sa main gauche et laisse un tiers sur la table (ligne 18).



Figure 6. Julie en train d'argumenter que la fraction d'Isabelle peut être représentée par un tiers (ligne 24).

**35. NATASHA :** *(Elle revient à son idée préalable, à savoir que les quatre douzièmes égalent une section verte, c'est-à-dire un tiers; elle enlève en silence la section verte et la remplace par quatre alvéoles simples; quand elle termine, elle dit d'un ton défiant :) Quatre douzièmes. Voilà!*

**36. PATRICK :** *(Qui a compris l'équivalence dit :) Tu les colles ensemble. (il montre les quatre alvéoles simples)*

**37. JULIE :** Non, tu fais juste utiliser... *(elle enlève les quatre alvéoles simples et les remplace par une section verte)*

**38. NATASHA :** Non, mais on a besoin d'utiliser des douzièmes, pas un tiers. *(Son intervention vient momentanément interrompre la discussion.)*

**39. PATRICK :** Oui? *(Il semble surpris.)*

**40. JULIE :** Si ça, c'est un tiers, ça, c'est comment de la farine que Danielle a utilisée. *(Elle montre la section verte de quatre alvéoles; voir Figure 7; entre-temps, Natasha place un douzième dans chacune des quatre alvéoles de la section verte; voir Figure 8.) (...)*

**41. NATASHA :** *(En remarquant que la fraction occupée est la même, elle dit :) C'est parce que c'est égal!*

**42. JULIE :** C'est ce que j'ai dit depuis le début, et vous m'avez dit non.

Dans cet extrait, on voit les élèves faire un effort pour se mettre d'accord. Pour y arriver, il faut qu'ils apprennent à écouter l'autre et à se donner les moyens d'interpréter ce que l'autre dit. Cela n'est pas facile du tout. Toute compréhension se fait du point de vue de celui ou de celle qui essaie de comprendre; la compréhension exige un dépassement de son propre point de vue pour s'ouvrir à ce que l'autre essaie de dire. Dans l'extrait, on voit que Natasha arrive à comprendre les propos mathématiques de Julie. Ces propos se raffinent progressivement, à mesure que la discussion avance. Natasha a dû surmonter l'obstacle qui consiste à croire que la fraction de farine qu'a utilisée Isabelle ne pouvait s'exprimer qu'en douzièmes. On voit clairement, dans ce court extrait, que Patrick ajoute peu aux arguments de la discussion, mais qu'il intériorise les propos et arrive à l'idée de fraction équivalente. Son intervention, à la ligne 36, aide Natasha à comprendre le point discuté lorsqu'il propose de voir les quatre douzièmes comme « collés ensemble ». C'est dans cet acte d'imagination qu'est saisi le sens de fractions équivalentes.

Julie avait l'idée d'équivalence dès le départ, mais elle n'est pas parvenue à convaincre les autres. Il ne suffit pas de dire quelque chose à quelqu'un pour se faire comprendre.



Figure 7. Julie montre la fraction qui représente un tiers (ligne 40).

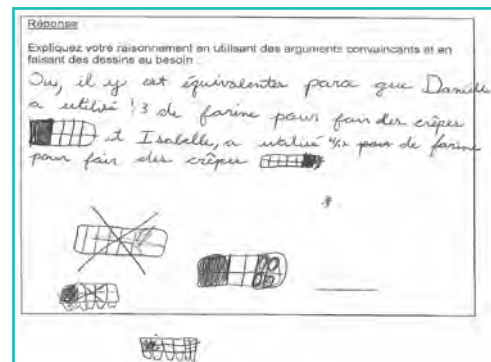


Figure 8. Natasha remplit le tiers avec des douzièmes (ligne 40) et se rend compte que « c'est égal » (ligne 41).

## Organisation de la présentation et syntaxe et symboles

Les exemples précédents ont mis en évidence le rôle de la « considération des arguments » et de l'« engagement au dialogue » dans la conceptualisation mathématique des élèves. Passons maintenant aux critères « organisation de la présentation » et « syntaxe et symboles ». Bien que ces critères puissent être évalués tant à l'oral qu'à l'écrit, nous allons discuter d'un exemple écrit. La figure 9 correspond aux arguments proposés par un groupe d'élèves avant que les groupes se rassemblent pour discuter des questions.

Peut-être à cause des éléments implicites contenus dans l'explication, l'argument proposé par les élèves de ce groupe reste peu clair et convaincant. En effet, l'argument repose sur des affirmations qui restent isolées, sans que des raisons soient mentionnées explicitement. On ne *dit* pas *pourquoi* les fractions sont équivalentes. Il faut faire un travail important d'interprétation pour comprendre ce qui rend l'argument proposé valide.

Après l'interaction entre le groupe et un second groupe, on remarque que la réponse s'est raffinée (voir Figure 10). Bien que la première partie de l'argumentation soit la même que celle du premier travail, on remarque que les dessins s'articulent mieux avec le texte et que l'organisation des dessins permet de mieux saisir l'équivalence des fractions. Même si elle ne reste qu'« illustrée », la raison qui justifie l'équivalence devient maintenant plus claire. Les couleurs sont ajoutées expliquant ainsi le diagramme en partant des couleurs associées aux parties de la boîte à œufs. Le groupe s'est rendu compte que sa représentation en noir et blanc perdait un élément de compréhension significatif. Le retour aux couleurs (1 vert et 4 beiges) vient appuyer l'explication écrite.

Il est sûr que la réponse du groupe aurait pu être mieux organisée, mais il est tout de même intéressant de noter qu'une discussion entre deux groupes d'élèves de cinquième année a conduit à cette constatation d'imprécision et à la recherche d'une approche plus efficace pour régler le problème. Nous voyons donc que l'échange des présentations entre divers groupes peut amener les élèves à mieux organiser leurs idées et à les appuyer ainsi qu'à mieux utiliser les symboles mathématiques dans le but d'obtenir une meilleure présentation orale ou écrite de leurs arguments.

## Rencontre de groupes

Nous venons de donner l'exemple d'un texte rédigé après la rencontre de deux groupes. Arrêtons-nous maintenant un moment sur une autre rencontre dont le résultat n'a pas été aussi bénéfique que nous l'aurions souhaité. Comme dans les autres cas, avant cette rencontre, chacun des groupes avait pu lire les réponses de l'autre groupe afin d'en faire une critique constructive. Après la lecture des réponses, les

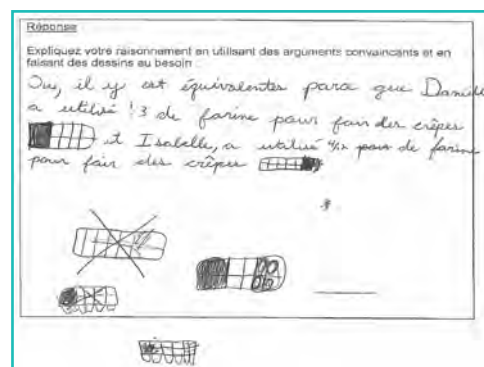


Figure 9. Texte produit par un groupe d'élèves pour expliquer le problème de Danielle et d'Isabelle.

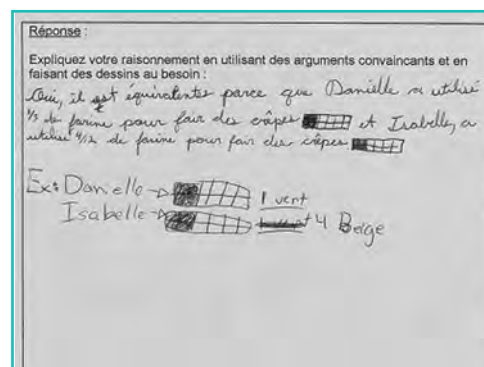


Figure 10. Réélaboration de l'explication après discussion avec un autre groupe.

groupes se sont rencontrés. Ils ont discuté des forces et des faiblesses perçues dans les solutions écrites. L'extrait ci-dessous porte sur la discussion de l'équivalence des fractions  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{4}{12}$ .

- 43. MARIE-FRANCE :** Vous êtes mal aux deux numéros. Pour le premier numéro, voici ce que vous avez fait. Vous avez dit ça, puis ça. (*elle montre les endroits appropriés sur la feuille de réponse*) Vous l'avez eu bien, excepté que vous l'avez mis dans le même carré. (*Elle veut dire « rectangle »; elle fait référence au fait que les deux fractions devaient être comparées en partant de deux illustrations distinctes des sacs de farine et non en partant du même sac de farine, illustré par le contenant d'œufs.*)
- 44. TAMMI :** À cause que... (*elle tente d'intervenir*)
- 45. MARIE-FRANCE :** Tammi, veux-tu attendre une minute, OK? Vous l'avez mis dans le même carré (*c'est-à-dire dans le même contenant d'œufs qui représente un sac de farine*) excepté quand même il t'en reste quatre et l'autre, il t'en reste quatre. Mais vraiment, ce qui est supposé rester et que nous on a fait est... nous autres aussi on l'a eu mal, on le sait, c'est parce qu'on n'a pas fait de dessins. (*Elle cherche les feuilles sur lesquelles les explications de son groupe sont écrites afin de comparer les deux.*) On l'a eu mal. Mais, ici, ce qu'on a fait (*elle montre la feuille de son propre groupe et compte les alvéoles vides sur la première figure*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et puis là, ici (*elle compte les alvéoles vides sur la deuxième figure pour montrer l'égalité*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
- 46. KATHIE :** Ça, c'est à cause qu'on voulait juste faire un... (*elle se fait interrompre par Tammi*)
- 47. TAMMI :** OK. Est-ce qu'on peut expliquer? (*Elle n'écoutait pas du tout Kathie.*) On voulait montrer que les deux étaient égaux. Les deux sont égaux. (*Elle montre sa réponse sur la feuille.*)
- 48. VICTOR :** (*parlant à Georges de manière à peine perceptible*) On va les laisser se battre!
- 49. GEORGES :** Hein?
- 50. VICTOR :** On va les laisser se battre!
- 51. MARIE-FRANCE :** Mais il fallait que tu les mettes dans un autre carré.
- 52. TAMMI :** Vous autres, regardez! (*Elle lit le texte du groupe de Marie-France dont elle est en train de faire une critique.*) Explication. Tu as dit, il reste huit douzièmes de farine. À qui? À qui? Aux deux?
- 53. MARIE-FRANCE :** Aux deux. Regarde. (*elle lit la copie de son groupe*) Oui, les fractions de farine utilisées par Isabelle et Danielle sont équivalentes parce que 4 sur 12 est la même affaire que 1 sur 3. Il reste 8 douzièmes de farine pour les deux. (*elle a maintenant fini de lire*)
- 54. TAMMI :** À qui ça reste?
- 55. MARIE-FRANCE :** Regarde, Tammi. Quand ça dit équivalent, ça veut dire les deux.
- 56. GEORGES :** (*Il s'exclame :*) Pareil!
- 57. MARIE-FRANCE :** C'est la même affaire. Ça veut dire, c'est deux personnes. Ça veut dire Danielle, Isabelle. Quand 4 sur 12... c'est Isabelle, et une sur trois, c'est Danielle. Tu vois? Ça, c'est ce que nous autres on a fait.

Du point de vue conceptuel, l'argument d'équivalence n'est pas exact. Les élèves centrent la discussion sur ce qui reste dans l'entier, alors qu'ils devraient se centrer sur les fractions elles-mêmes. En ce qui concerne la communication, cet extrait démontre clairement que le dialogue s'est limité à deux participants seulement : Tammi et Marie-France. Bien qu'elle ait peu participé à la discussion, Kathie écoutait ce que Marie-France et Tammi disaient. Georges intervenait périodiquement dans la discussion, mais pour parler de sujets non liés aux mathématiques. Les deux autres participants n'ont nullement contribué à la discussion.

Marie-France a tout de suite pris l'initiative; c'est une *leader*. Elle a monopolisé une grande partie du temps de la discussion. À la fin, les deux parties demeuraient campées sur leur position originale. L'échange entre équipes n'a pas porté ici beaucoup de fruits. Pour qu'un échange soit fructueux, les élèves doivent apprendre à être à l'écoute des autres. Les élèves doivent comprendre qu'un échange d'arguments et de points de vue ne signifie pas une lutte (voir ligne 48 ci-dessus). Cela donne une indication du genre de travail qu'il faut faire en salle de classe pour améliorer la compétence en communication chez les élèves du cycle moyen.

## 5. Survol et synthèse générale de l'exemple

Cette série d'extraits de dialogues et de travaux d'élèves donne quelques idées quant aux possibilités et aux limites de la communication chez les élèves de la cinquième année. Nous avons vu, au cours des exemples présentés, l'intérêt de faire travailler et discuter les élèves. Comme nous l'avons mentionné au chapitre 1, une des justifications de la communication est de faire raisonner et argumenter les élèves. L'engagement au dialogue, l'élaboration d'arguments, l'examen des arguments des autres se sont révélés des éléments importants pour enrichir les conceptualisations des élèves.

Les élèves du cycle moyen possèdent un vocabulaire suffisamment riche et évolué pour soutenir un dialogue intéressant. Bien que, en général, l'élève du cycle moyen tienne beaucoup plus fréquemment des propos mathématiques que l'élève du cycle primaire, il n'en demeure pas moins qu'elle ou il doit apprendre de nouveaux concepts qui exigent une nouvelle terminologie; elle ou il doit aussi être en mesure de produire des explications plus poussées qui reposent sur une gamme plus ample de systèmes de représentation (phrases écrites, dessins, etc.).

Mais il faut prendre en compte qu'à cet âge, la participation active de tous les membres du groupe ne va pas de soi. Les élèves connaissent les personnes qui sont « fortes » en mathématiques et jugent qu'il est souvent favorable de ne rien dire plutôt que d'essayer de contredire ces personnes. Il en résulte donc, souvent, une communication limitée de la part d'un groupe d'élèves, en particulier de la part de ceux qui sont moins forts dans cette discipline.

Quelle est alors la meilleure façon d'encourager la communication en classe, au cycle moyen? Il faut créer une culture d'ouverture à l'intérieur de la salle de classe. Il faut que les élèves comprennent qu'en mathématiques il peut y avoir plusieurs façons d'argumenter et de contre-argumenter.

On pourrait commencer progressivement la discussion entre les groupes en clarifiant les règles d'un débat et en insistant sur celle de l'engagement responsable de chaque membre des groupes qui discutent. Dans l'exemple présenté ici, bien qu'il y ait eu des discussions intéressantes lorsque les élèves ont travaillé en groupes de trois, les résultats de la discussion entre deux groupes se sont avérés faibles. Seul

un petit nombre d'élèves a vraiment tiré partie de ces discussions. Une solution à ce problème serait d'examiner la possibilité d'assigner des rôles distincts à chacun des élèves au cours de la rencontre de groupes. Mettre l'élève dans une situation où elle ou il devient responsable de convaincre ses pairs et l'enseignante ou l'enseignant que ce que son groupe dit est juste et précis, c'est l'inviter à parler.

## 6. Pistes supplémentaires pour réussir la communication

Il n'y a pas de recette magique pour apprendre. Il n'y a pas non plus de recette magique pour apprendre à communiquer. Voici, toutefois, certaines pistes que l'on peut essayer.

Pour qu'un travail en groupe soit efficace, les élèves doivent apprendre à faire part de leurs idées. Il faut qu'elles et ils apprennent à écouter.

L'enseignante ou l'enseignant peut faire remarquer les lacunes d'un texte explicatif comme celui à la figure 9. Elle ou il peut demander aux élèves de dire en quoi le texte à la figure 10 est meilleur que celui à la figure 9.

Le jumelage des groupes devrait être prévu à l'avance, non seulement dans le but d'assurer une discipline adéquate, mais dans le but de permettre l'avancement dans la compréhension et la résolution des problèmes présentés.

Au moment du jumelage des groupes, on pourrait penser à un protocole d'échange. Ce protocole porterait sur la marche à suivre (donner le temps à chaque groupe de s'exprimer; présenter les contre-arguments, etc.).



## 7. Pour en savoir plus...

Reid, D. (2002). "Conjectures and refutations in grade 5 mathematics". *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), 5-29.

Wright, M., and P. Foster. (1996, October). "Constructive activity for teaching elementary-school math and communications". *The Technology Teacher*, 56 (2), 20-25.

Zack, V. (2002). "Learning from learners: Robust counterarguments in fifth graders' talk about reasoning and proving". In *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, A. Cockburn and E. Nardi (eds.), University of East Anglia, UK, vol. 4, p. 434-441.