CHAPITRE 6

Des véhicules qui s'éloignent et des véhicules qui se rapprochent : le rôle des outils mathématiques dans la modélisation

Ce chapitre porte sur une série de leçons de 10e année centrées sur des concepts liés aux graphiques, aux tables de valeurs et aux équations dans le contexte d'une résolution de problème ayant recours à des objets de manipulation. La série de leçons a été donnée à un groupe d'élèves de 10e année théorique. L'attente visée par la leçon est la suivante :

> Modéliser et résoudre des problèmes portant sur l'intersection de droites (*Curriculum de l'Ontario, Mathématiques*, version révisée 2005, 10e année théorique, p. 49).

Les diverses activités menées au cours de cet ensemble de leçons permettent d'augmenter le niveau d'abstraction auquel les élèves devront faire face. Ici, il ne s'agit plus de modéliser une situation unique comme c'était le cas précédemment, mais il s'agit plutôt de résoudre un système d'équations. De plus, on aborde le concept physique de la vitesse relative, d'où l'importance de se fixer un point de repère, qu'il soit fixe ou mobile.

L'élève continuera à se servir des outils mathématiques qu'il s'est appropriés dans les autres activités du texte. En particulier, il utilisera avec efficacité la table de valeurs ainsi que le graphique.

Le niveau d'abstraction le plus élevé qu'on tente d'identifier ici concerne la vitesse relative. Le but est de donner aux élèves un outil concret afin de les mettre en situation, puis de leur permettre d'émettre des hypothèses pour que, par la suite, ils retournent les vérifier à l'aide du matériel de manipulation. Cela permet à l'élève de faire le va-et-vient si souvent nécessaire entre le monde du concret et de l'abstrait.

Le reste du chapitre sera consacré à une analyse des interactions qui ont eu lieu entre les élèves lorsqu'ils ont été placés dans cette situation d'apprentissage. Une attention particulière sera portée sur les mécanismes qui ont permis aux élèves de faire le saut entre le concret et l'abstrait dans des activités que nous leur avons demandé de faire[16].

La première activité : La prise de données

La première partie de l'activité consistait en une prise de données par chacun des groupes. Cette partie de l'activité représentait une phase critique sur laquelle le reste de l'activité allait reposer. En fait, c'est ici que l'élève est exposé à l'aspect concret du problème, soit de déterminer avec précision la vitesse de chacun des véhicules de Mathieu. Cette première partie de l'activité a nécessité un temps assez important, cependant, bien utilisé. C'est ici que les élèves ont pu être exposés concrètement aux dispositifs qui allaient par la suite être modélisés dans les prochaines activités.

[16] L'activité « Les véhicules de Matthieu » se trouve en annexe.

La classe a été divisée en deux groupes afin de permettre de calculer la vitesse de chacun des véhicules. À l'aide de chronomètres et d'une piste de 100 cm, chacun des groupes a pu trouver la vitesse de son véhicule. À cette étape, les groupes ont été exposés à l'erreur de mesure et ont donc dû se prévaloir de moyens afin de minimiser l'erreur. Avec ce groupe, on a vu l'utilisation de plus d'une personne pour prendre la mesure et l'utilisation de la moyenne afin d'en arriver à une valeur plus juste pour la vitesse comme stratégies afin de minimiser l'erreur. La Figure 1 montre les élèves en train de faire la collecte de données.

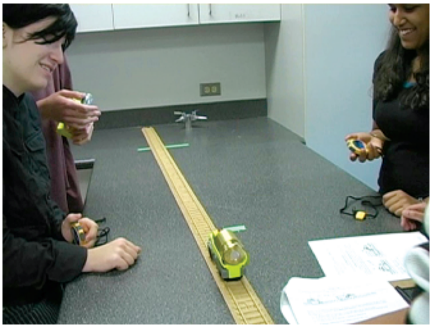


Figure 1. La collecte de données afin de déterminer la vitesse du véhicule.

En fin de compte, les groupes ont obtenu une vitesse de 11,86 cm/s pour le camion et de 9,1 cm/s pour le bouteur.

Puisque les élèves n'ont pas reçu de directives précises et qu'ils étaient laissés à eux-mêmes pour trouver une façon efficace de prendre la mesure, il y a eu une certaine période de tâtonnements avec le matériel afin de se familiariser avec ses possibilités. L'intervention de l'enseignant était peu fréquente afin de permettre aux groupes de mieux se situer et de travailler plus efficacement, tout en faisant eux-mêmes des découvertes. L'activité exigeait que les élèves travaillent en groupe afin de mener à bien la collecte.

Le premier problème : déplacement dans le même sens

La prochaine phase de l'activité demandait aux élèves de modéliser le déplacement des deux véhicules lorsqu'ils étaient placés l'un derrière l'autre, avec le véhicule le plus lent devant le véhicule le plus rapide, tel qu'il est illustré à la Figure 2.

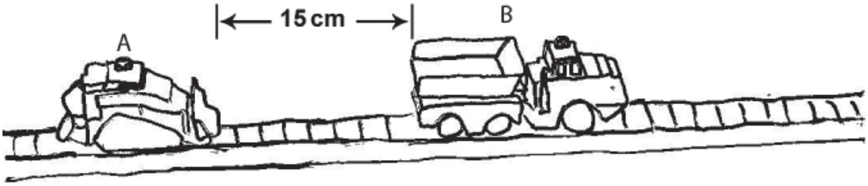


Figure 2. Problème 1 – Les deux véhicules se déplacent dans le même sens.

On demandait ensuite aux élèves de modéliser le déplacement de chacun des véhicules par un graphique, en spécifiant que la solution devait être placée dans le même plan cartésien. Par la suite, grâce au diagramme, on leur demandait de calculer une distance pour un temps précis, à un temps quelconque avant la rencontre des véhicules, ainsi que de déterminer le point précis de leur rencontre. L'activité, dans son ensemble, était faite au siège sans l'accès au matériel de manipulation utilisé dans la collecte de données. À la toute fin, les élèves étaient invités à vérifier leur réponse quant au point de rencontre à l'aide des véhicules.

Le premier défi a été de déterminer une façon de modéliser la situation. Sur le plan de la modélisation, on devait tenir compte du fait que les véhicules ne partaient pas d'un point commun et qu'ils n'avaient pas la même vitesse.

Dans un groupe, on a opté pour une approche de proportionnalité qui se résumait à utiliser le temps nécessaire pour parcourir 100 cm, puis à trouver le temps que prendra le véhicule pour parcourir 1,5 cm. Cette approche a été abandonnée par le groupe, bien qu'elle soit solidement ancrée sur leur vécu, dans le sens où l'expérience menée précédemment s'était faite sur 100 cm.

Pour résoudre le problème, le second groupe en est arrivé à la séquence suivante :

i) construire une table de valeurs pour les véhicules;

ii) placer les données sur le graphique et tracer des lignes;

iii) déterminer où les droites se croisent.

Bien que cela fût leur plan d'action, la route ne les a pas menés là directement et, en fait, les instructions qu'ils donnent ne sont pas celles qu'ils ont eux-mêmes suivies. La séquence ci-dessous illustre quelque peu leur cheminement :

1. **Monique :** Mathieu veut modéliser le déplacement de chaque auto par un graphique. De plus, il veut dessiner les deux graphiques sur le même plan cartésien et être en mesure de trouver, à partir des graphiques : a) la distance entre les autos, 1,5 seconde après qu'elles sont en route; b) la distance entre les autos à n'importe quel moment avant que l'auto A ne rattrape l'auto B; c) l'endroit précis où l'auto A rattrape l'auto B.
2. **Kim :** OK. Donc, ils se croisent sur les graphiques, ce qui veut dire que A rejoint B, non?
3. **Monique :** Aw, oui.
4. **Kim :** Se croisent (*elle écrit « se croise » au côté de c*). Euh, avant (*elle écrit avant au côté de b*) et après 1,5 seconde. (*elle écrit après au côté de a*)
5. **Monique :** Denis, vas-tu nous aider ici?
6. **Denis :** On devrait, euh, on devrait faire le graphique en premier.

7. **Monique :** OK. Alors. (*les trois consultent la feuille quadrillée*) Graphique.

8. **Denis :** Oui, parce que c'est la façon dont tu auras calculé ta vitesse en cm sur seconde. (*il montre l'axe des* y *en bougeant son stylo de haut en bas*) Et c'est la pente donc, cm sur seconde.

9. **Monique :** OK.

10. **Kim :** cm sur seconde. OK. *y* en cm. (*les trois écrivent) x* en s.

11. **Denis :** Et donc, euh, le véhicule B commence ici (*il pointe 15 sur l'axe des* y *sur son graphique*) et le véhicule A commence à l'origine parce que le véhicule est déjà en 15 cm par en avant.

12. **Enseignant :** Sûrement, on va se baser sur une certaine table de valeurs. Ça serait bien de l'indiquer. Et les points que vous allez choisir, assurez-vous d'indiquer vos points à chaque temps. « Quelle est la distance parcourue ? » Ça veut dire sur quel point vous avez décidé pour tracer vos deux droites.

13. **Monique :** OK. Alors, on fait une table de valeurs?

14. **Kim :** Table de valeurs. (*Monique sort une règle de son étui à crayons*)

15. **Monique :** OK. Où est-ce qu'on va le mettre?

16. **Denis :** On peut le faire après chaque seconde. Aw la table de valeurs. (*il tourne ses feuilles*) Aw. Je veux, je vais faire un graphique avant, ensuite la table de valeurs. Je travaille en arrière.

17. **Monique :** Mais, il a dit.

18. **Kim :** OK. Est-ce qu'on peut faire comme un brouillon table de valeurs? Juste parce que. Est-ce qu'on peut faire un graphe? (*Denis écrit sur sa feuille quadrillée*) Denis, Denis. OK. (*Denis regarde Kim)* Est-ce qu'on peut le faire pour que je comprenne ce qu'on fait?

19. **Denis :** Je vais en mettre à la distance qui est 9,1 cm (*il pointe la table*) en fonction de chaque seconde. Donc, ici je vais comme ça (*un point*) et ici je vais mettre comme ça (*un autre point plus haut*) et après je vais me faire la table de valeurs. Parce que c'est plus facile pour moi de travailler comme ça et ensuite apporter les données dans une table.

20. **Monique :** OK, alors on va tous faire ça.

21. **Denis :** OK.

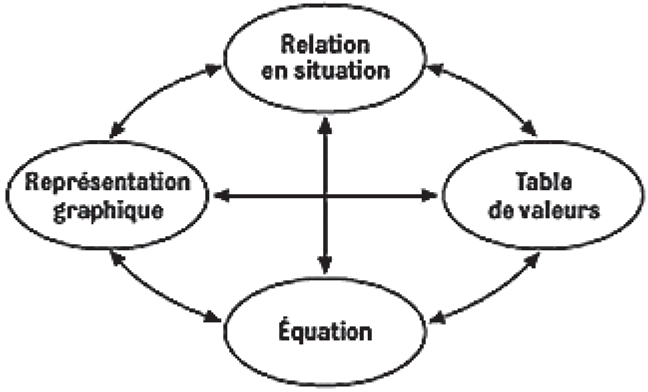
À la ligne 1, Monique lit la question afin que tous les membres du groupe soient sur la même longueur d'onde. Par la suite, Kim fait l'observation que les droites vont se croiser, et que ce point d'intersection représente l'endroit et le temps où le véhicule A rejoindra le véhicule B. À ce moment, Monique veut avoir la participation active de Denis. Denis était perçu par le groupe comme étant bien outillé pour cet exercice. Avant la ligne 5, il travaillait par lui-même sur le problème, mais Monique insistait pour qu'il travaille en groupe. Sa suggestion a donc été de faire un graphique, ce qui va à l'encontre de l'ordre que le groupe a proposé comme stratégie sur la copie finale de son travail.

Pour Denis, la représentation graphique recelait beaucoup plus d'informations qu'il pouvait analyser. À la ligne 8, il parvient à identifier la vitesse (et ses unités) en voyant la pente. Il est aussi capable d'identifier les points de départ, à la ligne 11. On voit donc que Denis repère facilement l'information pertinente d'un graphique et qu'il peut l'associer à la situation – en d'autres mots, il remarque que le taux de variation est équivalent à la vitesse et que la position d'origine est l'ordonnée à l'origine. Il semble ne pas avoir de difficulté à déterminer un temps et une position zéro dans ce contexte.

Il faut dire que l'identification d'une position zéro et d'un temps zéro n'est pas chose facile pour un élève de l'intermédiaire (voir les chapitres 4 et 5). On voit que, rendu à la fin de ce cycle, il est plus facile pour un élève de réussir, mais c'est tout de même un concept extrêmement abstrait pour lui qui vit dans un temps et un espace continus. Nous avons parlé de cela précédemment, en particulier dans l'analyse de la leçon en 9^{e} année où l'on parlait du graphique cartésien qui décrit le phénomène d'une manière globale et systématique.

Sans s'adresser à un groupe en particulier, l'enseignant dit à toute la classe, à la ligne 12, que ce serait une bonne idée d'avoir une table de valeurs. Cela a pour effet de démobiliser les deux autres membres du groupe. À la ligne 13, Monique veut laisser de côté l'idée du graphique pour l'instant et se concentrer sur la table de valeurs comme le suggère l'enseignant. Kim est du même avis que Monique, sauf que Denis n'est pas du tout convaincu de l'utilité de la table de valeurs, comme on peut le voir à la ligne 16.

En fait, Denis dit quelque chose d'intéressant, soit qu'il « travaille en arrière ». On comprend donc par ça qu'il ne fait pas les choses comme les autres, et qu'il voit la table de valeurs comme découlant du graphique, plutôt que le graphique découlant de la table de valeurs. Dans le programme-cadre de *Mathématiques* de la 9^{e} et 10^{e} année, on y trouve le diagramme reproduit à la Figure 3. La flèche bidirectionnelle entre la table de valeurs et la représentation graphique est pleinement mise en évidence dans cet extrait. Denis a atteint un niveau supérieur d'abstraction où il passe directement de l'équation à la représentation graphique sans passer par la table de valeurs. C'est en fait un exercice complexe puisqu'il n'avait même pas d'équation écrite – seulement une compréhension de ce que le taux de variation et la valeur initiale représentent physiquement. Il est pourtant conscient que ce n'est pas la route « habituelle », puisqu'il avoue au groupe faire les choses « en arrière ».



Le diagramme ci-dessus illustre les représentations utilisées pour modéliser une relation en situation. On doit pouvoir passer de l'une à l'autre et établir les liens entre elles.

Figure 3. Relation entre la situation, la représentation graphique, l'équation et la table de valeurs, selon le *Curriculum de l'Ontario*, *Mathématiques*, 9e et 10e année, version révisée 2005, p. 14.

En guise de solution de compromis, Kim, qui est prise entre son partenaire Denis et l'indication de son enseignant, propose de faire une table de valeurs au « brouillon » à la ligne 18. Sa solution de compromis est aussi pour lui permettre de mieux comprendre le processus pourtant clair dans la tête de Denis. Elle veut donc faire la table de valeurs avant le graphique afin de mieux comprendre. À la ligne 19, on voit que Denis ne démord pas de son idée de faire le graphique en premier, et il parvient à convaincre les filles d'en faire autant. Il répète l'idée que c'est plus facile pour lui de travailler dans cet ordre, quitte à reproduire la table de valeurs par la suite.

Par la suite, le groupe en question est parvenu à transformer le graphique cartésien en équation telle qu'on peut le voir dans la Figure 4 où les élèves ont trouvé l'équation $y = 11{,}86x$ pour le véhicule le plus rapide, et $y = 9{,}1x + 15$ pour le véhicule le plus lent. En fait, Denis le décrit dans ces termes : « C'est *mx* et puis t'as déjà le *m*, c'est la vitesse de A. Puis avec le B puisque ça passe par le point ici, ça commence à 15. C'est une variation partielle. » Il a donc pu unir, dans cette explication les termes décontextualisés comme *variation directe* et *variation partielle*, et les rattacher à la situation vécue.

Mathieu devrait construire un table de valeurs pour pouvoir reporter les valeurs qu'il trouve sur un plan cartésien.

Table de Valeurs
Véhicule A

Distance (cm)	Temps (s)
0	0
11,86	1
23,72	2
35,58	3

Table de Valeurs
Véhicule B

Distance (cm)	Temps (s)
15	0
24,1	1
33,2	2
42,3	3

~~Ou devrait faire~~ Il devrait trouver aussi des équations pour les deux droites.

Véhicule A -> $y = mx$
$y = 11,86x$

Véhicule B -> $y = mx + b$
$y = 9,1x + 15$

Figure 4. Identification des équations correspondant au mouvement de chacun des véhicules.

Une question difficile pour les élèves a été de déterminer ce que les valeurs sur le graphique représentaient physiquement. En fait, on demandait, par exemple, ce que signifiait le point (3,5, 46) pour l'auto qui avait démarré avec une longueur d'avance. La première réponse était de dire qu'elle avait parcouru 46 cm. Cependant, le choix de l'origine du graphique fait en sorte que le véhicule a vraiment parcouru 46 – 15 = 31 cm pendant ce temps. Donc, la différence entre la distance et la position comme concept a été ressortie. Afin d'aider dans l'explication, les élèves se sont servi de certains objets concrets, comme on peut le voir à la Figure 5. Ici, on simule à plusieurs reprises le mouvement avec le stylo qui agit comme ligne de départ, et les deux parties de la calculatrice qui agissent chacune comme un véhicule. À la suite d'une intervention de l'enseignant, le groupe a vu la différence entre la position et le déplacement (voir aussi à ce sujet le chapitre 5). Le groupe a ensuite utilisé la manipulation algébrique afin d'en arriver à une réponse numérique.

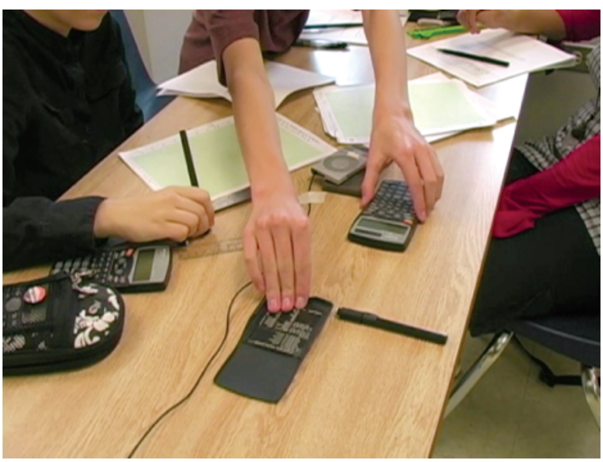


Figure 5. Utilisation de certains objets concrets afin de simuler le mouvement des véhicules.

Afin de conclure l'expérience, on a demandé aux élèves de vérifier la pertinence de leur réponse quant au point d'intersection à l'aide d'une expérience. Ils sont donc retournés au matériel de manipulation afin de confirmer ou d'infirmer leur conclusion. Au début, un débat s'entame au sujet de la position des véhicules, plus spécifiquement de ce que représente les 15 cm de distance – les élèves n'avaient pas apporté le diagramme de la Figure 2 avec eux. On a placé le devant du premier véhicule sur le point 0, et le devant du deuxième véhicule sur le point 15. On s'est rendu compte que cela n'allait pas correspondre à la situation modélisée, car le derrière du deuxième véhicule touchait presque le devant du premier, alors que les élèves s'attendaient à avoir besoin d'environ 5 secondes afin que le contact se fasse. On a ensuite placé le derrière du premier véhicule sur la ligne de 0 et le devant du deuxième sur les 15 cm pour en arriver encore à la même conclusion quant à l'invalidité du contexte réel par rapport à la modélisation effectuée. On s'est ensuite ravisé à l'aide de la feuille de route pour placer correctement chacun des véhicules.

Le groupe s'est aussi buté à des problèmes techniques dans sa quête d'une confirmation de la solution. Premièrement, il était extrêmement difficile pour les élèves de démarrer simultanément les deux véhicules. Le concept de simultanéité est en théorie très facile à comprendre et à concevoir. Cependant, dans la pratique, nous n'avons pas le luxe d'arrêter le temps tout simplement et de le repartir comme si c'était un interrupteur. Bien que les élèves aient eu une bonne idée de l'emplacement qui devait correspondre au point de rencontre, ils n'ont jamais été capables de le simuler. Ainsi, l'expérience s'est révélée non concluante.

Le deuxième problème : ajout d'un arbre

Le premier problème a été modifié afin d'ajouter un arbre – un objet stationnaire – entre les deux véhicules, tel qu'il est illustré à la Figure 6. On a demandé aux élèves de remplir des tables de valeurs afin d'identifier la distance entre les véhicules et l'objet stationnaire. Les tables ont ensuite mené au graphique, puis mener aux équations. On a demandé aux élèves de trouver le point de rencontre des deux véhicules.

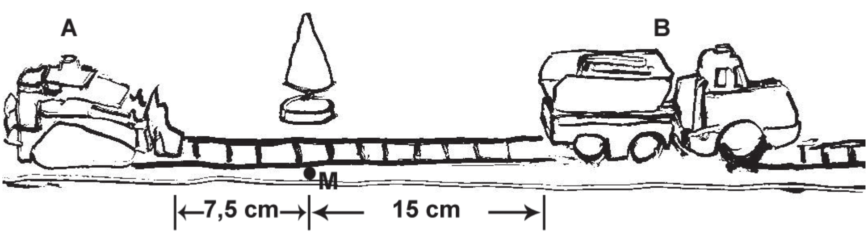


Figure 6. Problème 2 – Problème où les deux véhicules vont dans la même direction, mais où une origine différente de zéro est fixée.

Ce deuxième problème suit le même cheminement logique que le premier, et permet encore une fois à l'élève de passer au travers des éléments trouvés dans la Figure 3. La difficulté supplémentaire se situe ici sur le plan du choix du point d'origine, qui a été spécifié, et qui résulte en un point de départ négatif pour le véhicule A. Une position négative est certes un concept abstrait pour les élèves, et des activités concrètes, permettant de mieux saisir ses subtilités, stimuleront ou encourageront un apprentissage plus durable chez l'élève.

Un certain nombre de problèmes conceptuels ont fait apparition lorsqu'on a posé cette question aux élèves. Tel que l'on aurait pu deviner, c'est le fait que le véhicule A se trouvait derrière le point M qui a posé problème. Cependant, la difficulté ne concernait pas tant la table de valeurs que le graphique ou l'équation. Voici le cheminement pris par un groupe pour remplir la table de valeurs :

22. **Carl :** OK, donc pour 0 ce serait 15 cm.
23. **Sophie :** Attends, attends.
24. **Carl :** Ce n'est pas correct?
25. **Sophie :** Position arrière du véhicule B.
26. **Carl :** Oui.
27. **Sara :** Attends, il est déjà à 15.
28. **Carl :** Donc 0 sera 15.
29. **Sara :** cm, OK.
30. **Carl :** Ensuite 1 seconde, tu ajoutes à 15.
31. **Sara :** Non.
32. **Sophie :** Non.
33. **Carl :** Oui. Parce que si je suis à la même vitesse. Donc vitesse cm par seconde.
34. **Sophie :** Oh oui!
35. **Sara :** C'était 9,1.
36. **Carl :** Est-ce que c'est 9,1 pour B?
37. **Sara :** Est-ce qu'on utilise la même vitesse que la dernière fois?
38. **Carl :** Oui. Il a dit qu'on utilise la même vitesse que la dernière fois.
39. **Carl :** Ensuite 2 secondes, tu ajoutes un autre 9,1.
40. **Sara :** 33,2 (*les 3 élèves inscrivent leur réponse pour 2 secondes dans leur table de valeurs.*)
41. **Carl :** 44,3, puis 51,4, 60,5, 69,6, 78,7, 87,8, 96,9. (*ils écrivent les vitesses dans la table au fur et à mesure*)
42. **Sara :** OK, même chose pour A. Euh. Mais, il est derrière… -7,5.

43. **Carl :** Donc, il est à -7,5 à 0?
44. **Sara :** Oui.
45. **Carl :** Donc…
46. **Sophie :** Attends, attends.
47. **Carl :** -7,5 (*ils écrivent 0 seconde pour le véhicule à la position de -7,5*)
48. **Sara :** Parce qu'ils disent par rapport au point M.
49. **Sophie :** M. Alors.
50. **Carl :** Donc, tu fais -7,5, ensuite plus 11,86.
51. **Sophie :** Oui.
52. **Carl :** Ça fait 4,36. Ensuite plus 11,86 donne 16,22, 28,08, 39,94, 51,8, 63,66, 75,52, 87,38, 99,24. (*ils écrivent les vitesses dans la table au fur et à mesure*)

On remarque, à la ligne 42, que les élèves s'entendent pour que l'on suive la même procédure pour le véhicule A que pour le véhicule B. Il y a peu de débats quant au fait que le véhicule doit avoir une valeur de départ négative car, comme ils disent, il est « derrière » le point M. Le reste de la table de valeurs se remplit très facilement.

Là où le groupe a eu le plus de difficulté à conjuguer avec le négatif, c'est lors de la création du graphique. Initialement, ils produisent un axe vertical avec deux différentes échelles. L'échelle du côté positif augmente par 10, tandis que l'échelle du côté négatif augmente par -1, et ce, dans le but de couvrir les valeurs allant de -7,5 à 99,2. Ils se sont rendu compte de l'erreur et se sont rapidement ravisés. Le deuxième groupe, quant à lui, a utilisé un graphique avec les quatre quadrants. Ils n'ont fait aucune tentative pour essayer de rendre plus grand le premier et une partie du quatrième quadrant – où toute l'action physique se passait, s'assurant plutôt d'avoir une symétrie parfaite (donc allant de -90 à +90 pour les y, et de -9 à +9 pour les x).

Le groupe de Carl a ensuite commencé à placer les points sur le graphique. Après le 6e point, il dit au groupe que c'est tout ce qu'il y a à faire, puisqu'on peut maintenant joindre les points afin de former une droite. Il a été capable d'aller au-delà de la table de valeurs et de réaliser que, par la méthode utilisée pour construire la table, le résultat allait être une droite. Cependant, les deux filles du groupe ne pouvaient pas voir ce saut et ont demandé de continuer jusqu'à 9 secondes.

Par la suite, en répétant les étapes pour la deuxième ligne, Carl ne mentionne plus le fait qu'un petit nombre de points seulement est nécessaire. Il s'ajuste au fait que les autres membres du groupe ne pouvaient pas voir son raisonnement. Arrivé au point correspondant à 8 secondes, Sara dit au groupe que c'est le même point. Cette même constatation n'avait pas été faite lorsque le groupe remplissait la table. Une raison possible de cela est que la table a été remplie à une place décimale pour le véhicule B et à 2 places décimales pour le véhicule A (voir Figure 7). On remarque aussi à la Figure 7 qu'une comparaison directe est plus difficile à faire en raison de la disposition des deux tables. Cependant, lors de l'exercice de la création du graphique, le point d'intersection est ressorti tout de suite aux élèves, et ces derniers ont rapidement fait le lien avec le point de rencontre des deux véhicules. Donc, bien que les élèves n'aient pas travaillé aussi efficacement que possible avec le graphique (en suivant les consignes de Carl, par exemple), le graphique a tout de même permis de mieux comprendre en un coup d'œil le phénomène à l'étude.

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p (cm)	15 cm	24,1 cm	33.2 cm	42.3 cm	51.4 cm	60.5 cm	69.6 cm	78.1 cm	87.8 cm	96.9 cm

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p (cm)	-7,5 cm	4,36 cm	16.22 cm	28.08 cm	39.94 cm	51.8 cm	63.66 cm	75.52 cm	87.38 cm	99.24 cm

Figure 7. Tables de valeurs pour le problème 2.

C'est en ce qui a trait au développement de l'équation correspondant au phénomène qu'il y a eu le plus de discussion à l'intérieur du groupe. Cette discussion concernait deux aspects. Premièrement, il y avait une question au sujet de la méthode à utiliser afin de trouver l'équation et, deuxièmement, il y avait un litige concernant la valeur du 7,5 – à savoir s'il était positif ou négatif.

Dans le cas de Carl, il a pris les valeurs directement de son graphique et a déterminé que l'équation devait être $y = 11{,}86x - 7{,}5$ puisqu'il connaissait la valeur de la pente et la valeur de l'ordonnée à l'origine. Cependant, les deux filles n'étaient pas d'accord avec sa conclusion. Sara était d'avis que « C'est pas -7,5, parce que c'est moins, -7,5. La donnée qu'on a, c'est -7,5, et si tu fais moins, -7,5, ça devient une addition. » Donc, son idée était de soustraire la valeur de -7,5 avant de la placer dans l'équation. Carl revient à la charge en mentionnant que l'équation générale de la droite est de $y = mx + b$ et non pas $y = mx - b$. Cependant, les deux filles ne voient pas les choses de sa façon. Son argument est le suivant : « Il faut que ce soit -7,5 parce que l'ordonnée à l'origine est négative – c'est sous le 0. »

Une des raisons de la divergence d'opinions est due au fait que les 3 élèves n'ont pas pris la même approche. Si on compare la copie de Carl (Figure 8.1) à celle de Sophie (Figure 8.2) et à celle de Sara (Figure 8.3), on voit que, tel qu'il a été mentionné précédemment, Carl a lu directement l'équation de la droite du graphique. Cependant, Sophie et Sara ont pris une approche algébrique afin de déterminer l'équation. Comme le dit Sara, « Tu fais ta façon, on va faire la nôtre ». Même si Carl s'y opposait, en disant qu'il n'y avait pas de point à l'exercice que les filles entreprenaient, elles ne croyaient pas que sa réponse était juste, et d'ailleurs Sara lui dit : « C'est pas la façon que l'on a appris. », marquant le fait que les deux filles sont encore ancrées dans une approche systématique à la résolution de tels problèmes, alors que Carl « saute » des étapes et fait des liens entre les diverses représentations, travaillant plus abstraitement.

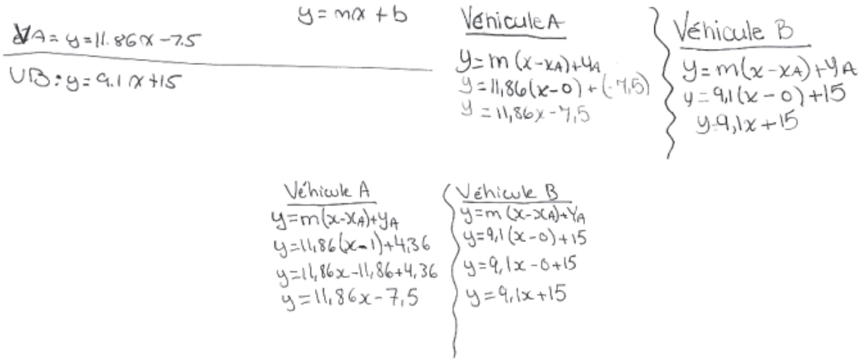


Figure 8. Au haut à gauche (Figure 8.1), le travail de Carl. Au haut à droite (Figure 8.2), le travail de Sophie; et au bas (Figure 8.3), le travail de Sara.

Pour les deux filles, il était clair qu'elles connaissaient déjà la pente. Cependant, elles ont utilisé la méthode plus générale consistant à trouver l'équation d'une droite lorsqu'on connaît un point et la pente, ne réalisant pas que l'ordonnée à l'origine était directement identifiable dans le graphique. Le groupe n'arrivait pas à s'entendre sur une approche, et les élèves ont demandé à l'enseignant d'intervenir. Il a suggéré aux filles de tenter de résoudre l'équation générale à l'aide de 2 points différents afin de confirmer ou d'infirmer – « de démontrer » – que leur résultat serait pareil, et idéalement, que leur résultat serait identique à celui de Carl. Sophie a utilisé le point (0, -7,5) et Sara a utilisé le point (1, 4,36) pour arriver à la conclusion que l'intuition de Carl était correcte. Les trois élèves ont obtenu la même équation, mais en prenant une approche différente. L'approche des deux filles aurait pu se faire sans graphique, alors que Carl a basé une bonne partie de son raisonnement sur la représentation visuelle des données du graphique.

Dans l'autre groupe, un processus semblable s'enclenche afin de déterminer l'équation des deux véhicules.

53. **Monique :** OK, alors le véhicule A, ça serait comme le *m*, c'est la vitesse et puis l'ordonnée à l'origine, ça serait le -7,5.

54. **Denis :** Cette fois-ci, c'est plus difficile. (*il dépose son stylo sur la table*) Si on fait une équation $y = mx + b$, ça serait $-b$ mais, attends, attends, attends. (*il consulte sa feuille quadrillée, mais il n'a pas de plan cartésien*). Est-ce que je peux voir ton graphique?

55. **Denis :** Um (*il observe le plan cartésien*) Oh, c'est cette droite non? (*il pointe à la droite du véhicule A*)

56. **Monique :** Oui.

57. **Denis :** Alors, ça fonctionne. (*il conclut que l'équation est* y = *11,86*x *– 7,5)*

Dans cet extrait, Denis perçoit une difficulté conceptuelle et doit utiliser plusieurs moyens afin de se convaincre de la légitimité du -7,5 en tant qu'ordonnée à l'origine. Dès la ligne 54, il voit que le problème sera plus difficile à cause du négatif. Il lui faut se concentrer, prendre son temps et trianguler avec le graphique produit par ses compagnons de travail (il était absent au début de la période) (ligne 55) afin de vraiment être convaincu de son équation. Ici, encore une fois, le graphique – une représentation plus visuelle et certes plus concrète – a servi à passer à l'abstraction d'une équation.

La calculatrice à capacité graphique n'a pas été utilisée à son plein potentiel durant l'exercice. Elle a servi à faire des calculs, mais peu de graphiques. Lorsque Kim tente de tracer les deux droites, une surprise l'attend. Elle entre correctement les équations $y = 11{,}86x – 7{,}5$ et $y = 9{,}1x + 15$, puis appuie sur la touche Graph.

58. **Kim :** Aw. Elles sont parallèles? Ça ne fait pas de sens. (*elle montre le résultat aux deux autres membres du groupe*)

59. **Enseignant :** Est-ce que tu mettrais les équations là?

60. **Monique :** On n'est vraiment pas habile avec ça (la calculatrice).

61. **Kim :** Je ne sais pas, j'ai besoin de Carl. Ça ne marche pas. (*elle s'adresse à Carl*) Si je fais avec l'ordonnée à l'origine dedans, pour B je fais $y = 9{,}1x + 15$, ça fait que les deux lignes sont parallèles. L'autre ligne est $y = 11{,}86x – 7{,}5$. (*elle lui donne la calculatrice*)

62. **Carl :** Non. (*il regarde l'écran*) Oh. C'est parce que ta fenêtre ne te montre pas ce que tu veux voir. (*Carl continue de travailler à la calculatrice, et Kim va le rejoindre*.)

Après 3 minutes, elle revient avec la calculatrice où le graphique est recentré et où il est clair que les deux droites ne sont pas parallèles.

À la ligne 58, Kim arrive à une impasse cognitive. Elle a fait le graphique en mode papier-crayon pour voir que les deux droites se rencontrent. Le fait qu'elles se rencontrent représente pour elle une preuve que les deux droites ne sont pas parallèles. Cependant, lorsque la calculatrice les trace, une différente conclusion en ressort. Kim était suffisamment convaincue de son travail pour mettre en doute ce qu'elle voyait à l'écran à cause de tout le travail qu'elle avait déjà accompli. Il n'est pas si clair que, si on avait simplement demandé de tracer les deux droites, elle n'aurait pas eu comme conclusion qu'elles sont parallèles. C'est un des dangers de la calculatrice à capacité graphique, soit le petit écran et l'imprécision inhérente des graphiques. Il faut absolument, lorsqu'on enseigne comment s'en servir, s'assurer que les élèves explorent au-delà de ce qui est présenté à l'écran pour avoir une vue d'ensemble plus juste de la relation.

Une fois les équations et leur résolution faites, les deux groupes se sont tout de même entendus pour dire qu'il était plus facile, plus précis et que l'exercice prenait moins de temps avec la résolution d'équations. Il semblait donc que, pour eux, l'investissement cognitif nécessaire pour développer le système d'équations leur épargnait du temps et de l'effort un peu plus loin dans le processus, et, de plus, leur donnait une réponse « plus précise que d'essayer de repérer le point de rencontre avec l'œil nu » comme le dit Monique.

Étant donné le manque de temps, les groupes n'ont pas eu la chance d'aller vérifier leur hypothèse quant au temps et au lieu de rencontre des deux véhicules. Cependant, les mêmes difficultés mentionnées pour le premier problème auraient refait surface, notamment le problème de synchronisation des véhicules au point de départ. Un second problème cette fois aurait été l'espace limité dont on disposait, en particulier la longueur de la voie ferrée.

Le troisième problème : la collision

Dans le troisième problème, on change la direction du mouvement d'un des véhicules pour créer une collision (voir Figure 9). Tout comme les exercices précédents, on a demandé aux élèves de remplir des tables de valeurs, puis de tracer le graphique et de formuler les équations. Les élèves devaient trouver le point de rencontre graphiquement et algébriquement, puis, en fin de séance, mener l'expérience afin de confirmer ou d'infirmer leur résultat.

Figure 9. Problème 3 – Problème où les deux véhicules vont dans une direction opposée.

Ce problème suit le même cheminement logique que les deux autres problèmes, permettant encore à l'élève de passer au travers des éléments trouvés dans la Figure 3. La difficulté supplémentaire se situe ici sur le plan du choix du point de repère. Cette fois, le point n'a pas été spécifié. Contrairement au problème précédent, la vitesse qui résulte de l'opération est négative. Encore une fois, l'idée d'une vitesse négative n'est pas intuitive pour les élèves.

Le premier groupe commence à discuter de la façon d'entamer le problème.

63. **Denis :** OK, donc. On doit décider quelque chose.

64. **Monique :** C'est comme. *(elle prend les calculatrices et fait en sorte qu'elles se frappent)*

65. **Denis :**	Nous devons décrire comment le faire. Euh, sur ce plan cartésien. (*il prend la feuille quadrillée*) On peut faire que le premier véhicule commence ici (*il pointe l'origine*) parce que ça, c'est comme 0 (*il pointe la feuille de questions à l'avant du véhicule A*) et l'autre commence à 100 cm, et puis ils vont comme ça. (*il montre les deux droites qui se croisent, l'une ascendante et l'autre descendante)*
66. **Monique :**	Euh.
67. **Denis :**	OK?
68. **Kim :**	Oh!
69. **Denis :**	Ou? ou? ou? (*continue*)
70. **Kim :**	Ou?
71. **Denis :**	Ou? Ou? Ou? (*continue*) C'est tout ce qu'on peut faire donc, c'est ce qu'on va faire.
72. **Monique :**	OK.
73. **Kim :**	Est-ce qu'on peut en faire une positive et l'autre négative?
74. **Denis :**	C'est ce que je pensais, mais c'est stupide. Parce que, quand on aura une réponse, elle sera négative. Elles se rencontreraient à -20 cm.

Dès le début (ligne 63), Denis réalise qu'il y a une décision qui doit être prise. Pendant ce temps, Monique (ligne 64) simule la situation où les deux objets, en l'occurrence des calculatrices, partent et se rejoignent quelque part au milieu. Denis offre la suggestion de partir du devant du véhicule A comme point de repère. Il complète ensuite son hypothèse correctement et identifie avec ses mains le besoin d'une droite de pente positive et l'autre droite négative. Monique et Kim se montrent d'accord aux lignes 66 et 68. Par contre, Denis est toujours pensif et cherche une autre option (ligne 69 et début de la ligne 71), pour enfin conclure que c'est la seule façon possible de faire le problème et ainsi décréter que le problème se ferait ainsi. À la ligne 73, Kim suggère la possibilité d'avoir un véhicule qui part d'un point positif et l'autre sur un point négatif, un peu comme dans le problème précédent. Cependant, elle ne le propose que comme suggestion, et Denis (ligne 74) dit lui aussi y avoir pensé, mais que cette stratégie résulterait en une analyse plus complexe du phénomène. Le groupe s'entend pour aller de l'avant avec la stratégie de Denis.

Le groupe de Carl, Sophie et Sara suit un parcours semblable afin d'en arriver à la solution. Au début, Sara déplore le fait qu'il n'y ait pas de données, indiquant l'absence d'un point de repère. Cependant, Carl indique qu'il y a le 100 cm, pour un peu plus tard se raffiner pour dire qu'il y a 100 cm « entre » les deux véhicules. Carl utilise trois différentes stratégies afin d'illustrer le phénomène à ses collègues de travail. La Figure 10.1 le montre utilisant ses mains, ensuite à la Figure 10.2, il utilise une règle, puis à la Figure 10.3, il utilise les véhicules. Son explication avec la règle est probablement la plus représentative de son interprétation de la situation.

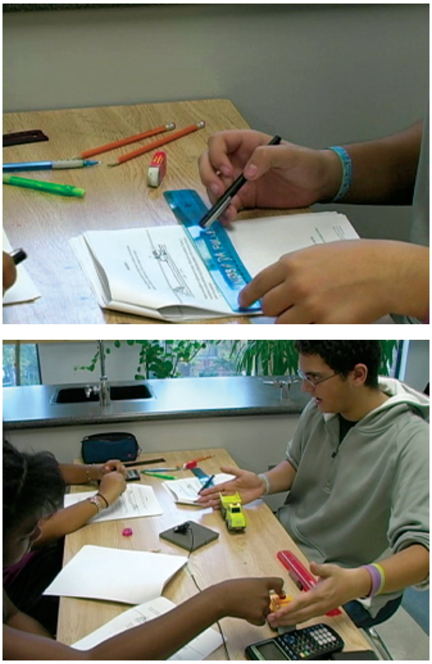


Figure 10. Carl démontre de trois façons son interprétation de la situation. À la Figure 10.1, c'est à l'aide de ses mains, à la Figure 10.2, c'est à partir d'une règle, puis à la Figure 10.3, il utilise les véhicules afin de concrétiser la simulation.

75. **Carl :** Si tu utilises une règle par exemple, un (*véhicule*) va débuter à 0 et l'autre (*véhicule*) par exemple à 30, et ils veulent se rendre au milieu. Donc celui-ci monte (*celui à 0*) et celui-là va descendre de 30 à 15 (*il fait l'exemple avec la règle*).

Il fait ensuite le même scénario, mais avec les véhicules où il explique plus clairement sa vision et son hypothèse quant au point de rencontre des deux véhicules.

76. **Carl :** OK. Il commence à 100 cm de distance. (*il place un camion à une extrémité et l'autre camion à l'autre extrémité*) Disons que c'est 100 cm. Celui-là (*camion*) est 100 cm, ici c'est 0 (*en avant du bouteur*). Et ici, (*l'espace entre le camion et le bouteur*), c'est le milieu, disons 50. Donc celui-là, ça doit monter de 0 à 50 pour arriver au milieu, et celui-là, ça doit descendre de 100 à 50 (*Carl déplace lentement son camion vers le milieu.*) Mais, ils ne vont pas arriver à 50 à cause de la vitesse. La vitesse de celui-là (*bouteur*), c'est plus vite. Ils vont se rencontrer à 60 quelque chose, 75 ou quelque chose du genre.

On peut voir par ce court extrait que Carl a bien saisi le phénomène physique à l'étude. Il est passé d'une représentation avec ses mains à une représentation avec une règle de 30 cm, à une représentation avec les deux véhicules. Il a aussi saisi le fait que les deux véhicules ne se rencontreront pas au milieu, mais plus près du véhicule le plus lent, puisqu'ils roulent à une vitesse différente.

Quelques minutes plus tard, l'enseignant va voir le groupe de Denis, Monique et Kim afin de s'assurer que le groupe progresse bien.

77. **Enseignant :** Moi, je vous demande, le véhicule A, à 0 seconde, où se trouve-t-il?

78. **Denis :** Ici. (*il pointe son graphique*) à 0.

79. **Enseignant :** Donc, tu as dit 0. Le véhicule B à 0 seconde, où se trouve-t-il?

80. **Monique :** À 100.

81. **Enseignant :** D'accord. Tu viens de décider toi-même le repère.

82. **Denis :** OK.

83. **Enseignant :** Tu as dit que ton repère, c'est A.

84. **Denis :** OK.

85. **Enseignant :** Donc, le point P (*le point de repère*), c'est A à 0 seconde. C'est lui, c'est 0. L'autre véhicule se retrouve à 100. Tu aurais pu faire le contraire. Tu aurais pu dire, à 0 seconde le véhicule B se trouve à 0 cm, mais le véhicule A se trouve à 100 cm. C'est ça, ce que je dis. Soit tu décides que ça c'est le point (*montre le devant du véhicule B sur le croquis*) ou que ça c'est le point (*montre le devant du véhicule A*). Ça va donner la même chose.

86. **Kim :** OK.

87. **Enseignant :** D'accord. Oui ou non?

L'enseignant commence son intervention (ligne 77) en demandant de lui indiquer le point de repère que le groupe avait choisi. Une fois satisfait de la réponse donnée par le groupe, il vient infirmer l'idée qu'avait Denis qu'une seule approche était possible (ligne 71) en mentionnant le fait qu'on peut regarder le problème en renversant les directions (ligne 85). Ce renversement est non intuitif parce que, sur le diagramme (Figure 9), le véhicule A est à la gauche, et le véhicule B est à la droite. Depuis un très jeune âge, on a montré aux élèves, avec la droite numérique, que les nombres positifs sont à la droite du zéro, et les nombres négatifs sont à la gauche. Or, ici, l'enseignant va à contre-courant en suggérant que le 0 est à la droite, et +100 est à la gauche. Une autre stratégie pour le groupe aurait été de prendre le 0 à la droite, et de choisir le -100 à la gauche. Mais, encore une fois, il semble contre-intuitif de faire cela et plus rassurant pour des élèves du cycle intermédiaire de travailler avec des nombres positifs.

Dans le groupe de Carl, Sophie et Sara, c'est cette dernière qui pose la question au groupe plutôt que l'enseignant.

88. **Sara :** Mais lequel commence à 0, et lequel commence à 100?

89. **Carl :** Ça ne fait pas de différence.

90. **Sophie :** Non, regarde.

91. **Carl :** A commence à 0 et ensuite B commence à 100. Et ensuite, ils s'approchent. (*il fait l'exemple avec ses mains qui se frappent*)

92. **Sara :** OK.

Elle veut savoir lequel des deux véhicules correspond au zéro. C'est Carl à la ligne 91 qui parvient à la convaincre de l'utilisation d'un point de repère plutôt que l'autre. Il s'est basé sur son argumentation précédente avec le mouvement des mains et l'utilisation de la règle pour donner une réponse à Sara.

Le prochain extrait montre les étapes suivies par le groupe de Denis, Monique et Kim afin de développer les équations pour chacun des véhicules une fois que le graphique est produit.

93. **Denis :** On a déjà nos choses. On a nos deux équations, donc ici, pour le véhicule B, on ajoute notre négatif. (*il retourne au problème 1*)

94. **Monique :** Mais, il n'y a pas +15.

95. **Denis :** Oui. Il n'y a pas +15

96. **Monique :** C'est différent.

97. **Denis :** Aw.

98. **Monique :** C'est +100.

99. **Denis :** Non, c'est parce que, si on met +100, ça veut dire que, c'est toujours, à chaque fois, mais avec l'autre, avec celui-là (*il montre le plan cartésien du problème 2*), on a fait, on a utilisé la même équation. On n'a pas écrit plus quelque chose ou moins quelque chose, donc on peut l'utiliser quand même.

100. **Kim :** Ici. (*elle montre le plan cartésien du problème 2)*
101. **Denis :** Oui, on peut le faire, on ne doit pas juste faire la distance.
102. **Kim :** On a fait l'équation comme 11,86.
103. **Monique :** Tu veux dire celui-là? (*elle montre le graphique qu'ils sont en train de faire)*
104. **Denis :** Non, je veux dire celui-là. (*il prend le graphique de Kim)* Celui que vous avez fait quand j'étais absent.
105. **Kim :** C'était y = 11,86x et y = 9,11x.
106. **Monique :** Ça devrait être -9,11x.
107. **Denis :** C'est seulement la vitesse parce que si… Tu sais, ils ont donné le repère. Si on commence par là, ou par là, mais on n'a pas écrit où on commence dans l'équation.
108. **Monique :** Oui.
109. **Denis :** Oui?
110. **Monique :** Oui. On avait écrit (*elle consulte ses feuilles*), on avait écrit y = -7,5.
111. **Denis :** C'est vrai… Qu'est-ce que je fais? Wow!
112. **Monique :** Parce que c'est l'ordonnée à l'origine.
113. **Denis :** Tu as raison. OK. Tu as raison, tu as raison. Je l'ai.
114. **Kim :** Donc, on, il faut qu'on écrive l'ordonnée?
115. **Monique :** Mmm.
116. **Denis :** OK, c'est vrai. Ici on a, on doit commencer avec +100. + 100 et la pente est négative.
117. **Monique :** Oui. Exactement.

Au début de la séquence (ligne 93), Denis voulait simplement retranscrire les équations utilisées dans un problème précédent, et ne pas utiliser d'ordonnée à l'origine. Monique et Denis tentent d'expliquer l'absence du +15 ou la présence du +100 en retournant aux problèmes précédents. À la ligne 99, Denis explique sa compréhension du +100 qui veut dire, pour lui, que pour chaque seconde, il ajoute 100. Selon lui, il doit se limiter à travailler avec les vitesses. Cependant, Monique parvient à le convaincre en lui montrant un exemple du travail effectué plus tôt, et Denis se convertit à l'idée d'avoir une ordonnée à l'origine dans la question, en plus d'une valeur négative pour la pente.

Une fois leur stratégie identifiée, le groupe est retourné à la feuille de problème afin de remplir la table de valeurs. Dans le cas de Monique, elle a écrit 2 points pour chacun des deux véhicules (0 seconde et 1 seconde), puis elle a écrit l'équation correctement au-dessous. Dans le cas de Denis, il a pris 3 points pour chacun des deux véhicules (0, 1 et 2 secondes), puis il a écrit l'équation correctement au-dessous de chacune des tables de valeurs.

Dans le cas de Kim, elle a placé 4 points (0 à 3 secondes) avant de formuler l'équation. Chacun a par la suite placé les points sur le graphique afin d'en arriver à la représentation visuelle de la situation. La précision des élèves n'est pas à contester, car ils sont arrivés essentiellement à la même solution en utilisant l'approche graphique plutôt que l'approche algébrique – chose difficile à faire surtout lorsqu'on travaille avec des décimales comme c'était le cas ici. On peut, par contre, voir le différent degré d'aisance à travailler à l'aide des graphiques chez les trois élèves. Monique associe directement les 2 points à une droite et la trace aussitôt, alors que Kim a besoin de plus de points avant d'être convaincue que c'est une droite.

En circulant, l'enseignant a fait un commentaire quant à l'utilisation des x et des y. Il a mentionné que le groupe semblait ancré sur l'utilisation de ces variables, alors qu'il aurait été préférable, selon lui, de parler de v et de t, puisqu'on pouvait les associer à des quantités physiques précises. Cela est une excellente stratégie à promouvoir, soit l'utilisation de variables qui ont un sens dans le contexte de la question. Trop souvent en mathématiques on s'éloigne du sens en utilisant des variables comme x et y, qui ne font que rendre le problème encore plus abstrait.

Le groupe a déterminé que les résultats coïncident presque parfaitement entre la solution algébrique et la simulation de l'événement (voir Figure 11). Lorsque l'enseignant a demandé les raisons possibles pour cette différence, Monique a mentionné la possibilité de variables comme l'erreur humaine qui peuvent influencer le résultat. Sa conclusion est que la simulation « n'est pas comme les mathématiques parfaites ». En fait, par cet énoncé, elle indique qu'elle comprend le plus grand rôle des mathématiques, soit de modéliser une situation et de tenter de trouver des outils afin de manipuler le modèle, tout en réalisant les limites inhérentes de la concordance entre le modèle et la réalité. Denis a ajouté la difficulté encourue avec le matériel afin d'assurer un départ simultané des deux véhicules. Sara a mentionné que « le graphique, c'est plus précis que l'expérience ». Ici, c'est presque une fausse impression de sécurité, car le modèle ne devrait pas être plus précis que le phénomène observé. Les paroles de Sara laissent croire qu'elle n'a pas tout à fait saisi la nuance entre le modèle mathématique (ici le graphique) et le phénomène physique (l'expérience), et celui qui est venu en premier, contrairement à Monique.

Figure 11. Résultats de l'expérience.

Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons fait des commentaires portant sur une séquence d'enseignement visant les concepts rattachés à l'intersection de deux droites dans le plan cartésien. Pour y arriver, les élèves sont passés par les étapes de la modélisation physique de la situation, puis par des tables de valeurs, des graphiques et des équations. La séquence s'inscrit dans le *Curriculum de l'Ontario* pour la 10e année théorique sous « Modéliser et résoudre des problèmes portant sur l'intersection de droites » (*Curriculum de l'Ontario, Mathématiques*, version révisée 2005, 10e année théorique, p. 49).

L'activité était basée sur des véhicules réels avec une propriété fixe, soit la vitesse. Nous avons permis aux élèves de modifier la distance initiale les séparant, ainsi que le sens du mouvement de chacun. Le fait que nous parlions de véhicules limités à une voie ferrée contraignait la situation à un problème classique en deux dimensions. Parmi les difficultés rencontrées par les élèves, l'identification d'un point repère a été la plus grande. Ce point repère, celui à partir duquel la position et la vitesse vectorielle sont considérées, a été donné dans un certain nombre d'activités, mais laissé aux élèves à identifier dans d'autres. Cela faisait en sorte que les élèves, en groupe, devaient déterminer si la valeur initiale de la fonction était positive ou négative et si la vitesse à utiliser était positive ou négative.

Les extraits présentés dans ce chapitre permettent de voir la richesse de la communication entre les élèves, et entre les élèves et l'enseignant. Comme le chapitre 2 le suggère, nous voyons que cette activité, basée sur des questions entourant une *unité conceptuelle*, a été très bien appréciée et réussie par les élèves. La séquence d'enseignement proposée amène lentement mais sûrement l'élève vers un raffinement de son modèle mathématique au fur et à mesure que le contexte change. En physique, le mouvement et la position des véhicules semblent peu changer d'une activité à l'autre. Cependant, en mathématiques, il y a plusieurs éléments à considérer.

Lectures supplémentaires

Arzarello, F., and O. Robutti (2004). "Approaching functions through motion experiments", *Educational Studies in Mathematics, 57*(3), p. 305-308.

Bay, J. M., and D. G. Wasman (2000). "Making the coordinate grid come to life with human graphing", *Mathematics Teacher, 93*(7), p. 553-554.

Fechhelm, J., and J. Nelson (2007). "Walk this way", *Science Scope, 30*(6), p. 50-52.

Hale, P. (2000). "Kinematics and graphs: Students' difficulties and CBLs", *Mathematics Teacher*, *93*(5), p. 414-417.

Lapp, D. A., and V. F. Cyrus (2000). "Using data-collection devices to enhance students' understanding", *Mathematics Teacher, 93*(6), p. 504-510.

Swingle, D. A., and L. M. Pachnowski (2003). "Filling in the gaps: Modelling incomplete CBL data using a graphing calculator", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(3), p. 361-370.