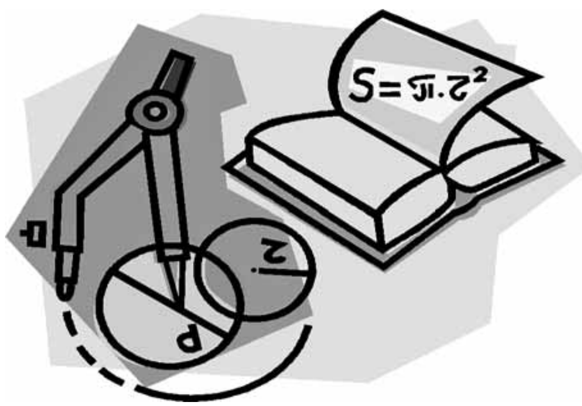
Annexe 4

Une leçon pour le cycle intermédiaire

Du raisonnement et des limites de la perception



Géométrie et sens de l'espace

7e ou 8e année

Durée

Deux périodes de 60 minutes chacune.

Description

Le but de cette activité est d'amener les élèves à construire la médiatrice d'un segment à l'aide d'une règle et d'un compas. On commence par une activité où des cerceaux servent de matériel de manipulation pour dessiner un quadrilatère. Une exploration des propriétés géométriques du quadrilatère sert d'introduction à l'élaboration d'un texte qui décrit les étapes de construction d'une médiatrice à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée. L'activité se fait en petits groupes de trois élèves. Les petits groupes échangent leur texte. À la fin, les groupes se réunissent pour discuter des points forts et des points faibles des textes proposés.

Note : Cette leçon peut se faire en 7ᵉ ou en 8ᵉ année. En 7ᵉ année, certains résultats généraux qui seront vus en 8ᵉ année doivent être considérés comme vrais; les élèves peuvent les vérifier expérimentalement. C'est le cas du théorème qui affirme que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° et du théorème qui caractérise deux droites parallèles relativement à une égalité d'angles formés par une sécante et les droites en question.

Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

Année d'études

7ᵉ année

Domaine

Géométrie et sens de l'espace

Attente

Utiliser différents instruments pour effectuer des constructions géométriques.

Contenu d'apprentissage

Identifier et construire des droites parallèles, des médianes, des médiatrices et des bissectrices à l'aide de divers instruments et techniques (p. ex., Mira, compas, pliage).

Année d'études

8ᵉ année

Domaine

Géométrie et sens de l'espace

Attente

Appliquer les propriétés des angles liés aux triangles et aux droites parallèles coupées par une sécante.

Contenus d'apprentissage

Développer les propriétés d'angles formés par deux droites parallèles et une sécante, la propriété de la somme des angles dans un triangle et celle de l'angle extérieur d'un triangle, et les utiliser pour déterminer les mesures manquantes d'angles dans diverses figures.

Notes de planification

– Préparer le matériel nécessaire pour l'activité : des cerceaux, des mètres non gradués ou des tiges de bois, du ruban gommé, des rouleaux de corde ou de fil, des ciseaux, des cartons carrés d'environ 75 cm de côté et des stylos-feutres.

– Préparer les feuilles de route nécessaires à la tâche (des exemples de feuilles de route se trouvent ci-dessous).

– Préparer un cerceau (qui sera appelé « cerceau modèle ») dont le centre est désigné à l'aide de fils visibles attachés au cerceau avec du ruban gommé. Ce cerceau sera placé devant la classe, comme exemple pour l'activité que les élèves feront en petits groupes.

Acquis préalables

– L'élève connaît la terminologie de la géométrie telle que : segment de droite, angle aigu, angle obtus, angle droit, bissectrice, médiatrice, congruence.

– L'élève connaît les résultats suivants :
  - la somme des angles supplémentaires est égale à 180°;
  - les angles de la base d'un triangle isocèle sont égaux;
  - la somme des angles d'un triangle est égale à 180°;
  - si les côtés d'un triangle sont égaux à ceux d'un autre triangle, les deux triangles sont égaux (ou congruents);
  - deux droites sont parallèles si les angles alternes-internes formés par une sécante sont égaux (ce résultat est parfois appelé « théorème Z »).

– L'élève doit être capable de trouver le centre de masse d'un objet (c'est cette marche à suivre qui permettra à l'élève de trouver le centre d'un cerceau).

Déroulement de l'activité

Partie 1 (jour 1)

1. L'enseignante ou l'enseignant sépare les élèves en groupes de trois ou quatre élèves.
2. Chaque groupe s'installe à une station de travail où il y a un rouleau de corde, un rouleau de ruban gommé, une paire de ciseaux, un stylo-feutre, un mètre non gradué et un carton.
3. L'enseignante ou l'enseignant distribue la feuille de route : « Des arcs, des cercles et des cerceaux » (voir la feuille de route 1) et lit le premier paragraphe (but de l'activité) avec les élèves. Pendant cette partie, les élèves utilisent une approche empruntée à la science, à savoir trouver le centre de masse du cercle en suspendant un poids verticalement à partir de deux points distincts du cercle. Le point où les deux ficelles se rencontrent représente le centre du cerceau (la méthode est expliquée au site suivant : http://wow.osu.edu/NTB/centerofmass.htm). L'enseignante ou l'enseignant place le cerceau dont le centre est déjà désigné (« cerceau modèle ») de façon que chaque groupe le voit. En utilisant les cerceaux et en suivant les directives de la feuille de route, les élèves construisent un quadrilatère (il s'agit en fait d'un parallélogramme équilatéral ou losange); voir Figure 1, où le quadrilatère est indiqué en pointillé. (On trouvera ci-dessous quelques notes concernant la feuille de route 2.)

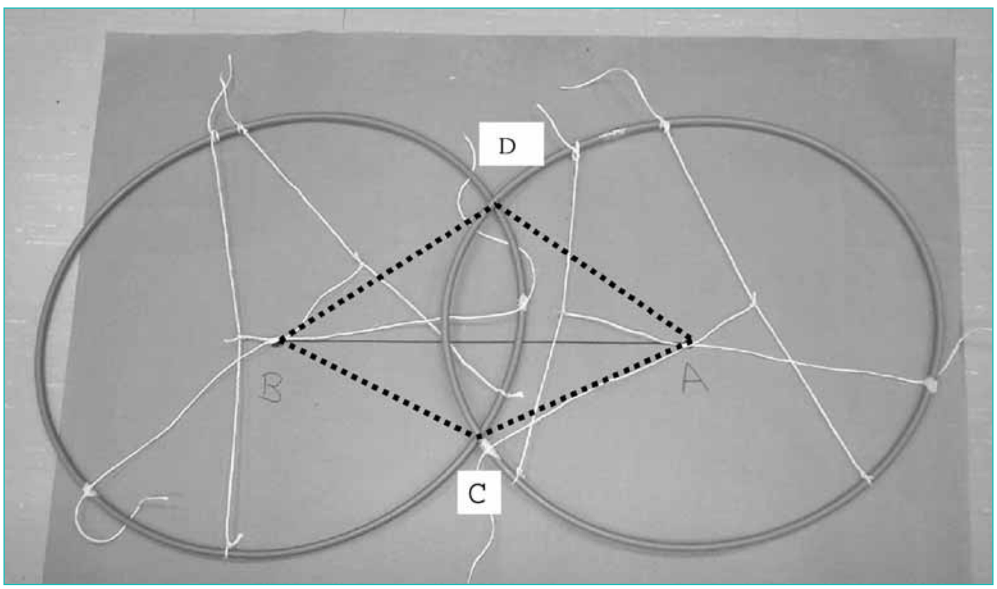


Figure 1. Le centre du cerceau de droite est placé sur le point A; celui de gauche est placé sur B. La construction aboutit au quadrilatère indiqué en pointillé.

4. Si cinq minutes se sont écoulées et si les élèves n'ont pas encore trouvé le centre des cerceaux, il est important que l'enseignante ou l'enseignant rappelle aux élèves la marche à suivre.
5. Lorsque les élèves ont rempli la feuille de route 1, ils doivent recevoir la confirmation de l'enseignante ou de l'enseignant avant de recevoir la feuille de route 2 : « Les propriétés d'un quadrilatère » (voir ci-après).

6. Quand la feuille de route 2 est terminée, chaque groupe rencontre un autre groupe désigné par l'enseignante ou l'enseignant. Pendant la rencontre en petits groupes, les élèves échangent leurs réponses et justifient leurs arguments. L'enseignante ou l'enseignant circule parmi les groupes et s'assure que les groupes ne se limitent pas à un échange de réponses, mais qu'ils discutent de façon critique des arguments des autres.

Notes sur la feuille de route 2 « Les propriétés d'un quadrilatère »

Le contenu de géométrie de 7e année inclut quelques déductions sur des angles supplémentaires et quelques propriétés sur les réflexions et les translations. Ce n'est qu'en 8e année que les élèves étudieront en détail la propriété d'angles formés par deux droites parallèles.

La feuille de route 2 propose une séquence de questions où les élèves sont amenés à constater que, d'après la construction suivie, les segments AC, AD, BC et BD sont des rayons de cercles égaux et sont donc des segments congrus entre eux (voir Figure 2 ci-dessous; voir aussi la question 4 de la feuille de route).

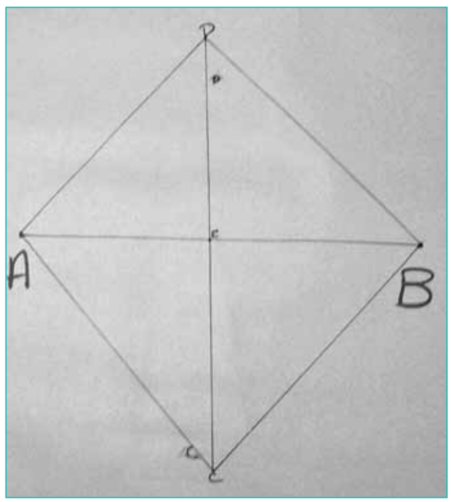


Figure 2. Quadrilatère construit à l'aide des cerceaux.

Réponses aux questions 5 et 6 de la feuille de route :

En partant du résultat central précédent, les élèves, aidés au besoin par l'enseignante ou l'enseignant, peuvent déduire les deux résultats suivants :

– Les triangles ACB et ADB sont isocèles (voir Figure 3).

– Les triangles CAD et CBD sont isocèles (voir Figure 4).

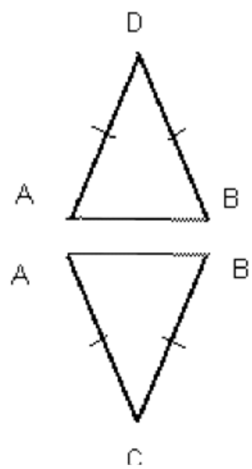


Figure 3 : Les triangles ACB et ADB sont isocèles.

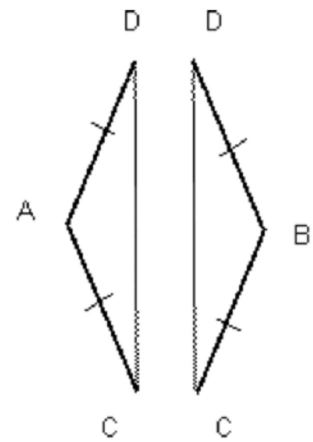


Figure 4 : Les triangles CAD et CBD sont isocèles.

Puisque, d'après (1), le triangle ACB est isocèle, les angles de la base sont égaux (contenu d'apprentissage de la 6e année). On en déduit le résultat suivant :

– Les angles CAB et CBA sont égaux (voir Figure 5).

Du fait que ADB est un triangle isocèle, on en déduit que :

– Les angles DAB et DBA sont égaux (voir Figure 5).

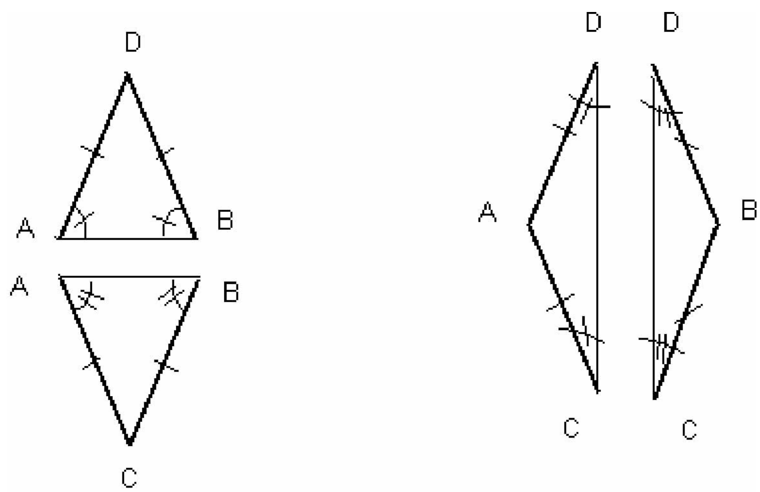


Figure 5 : Dans un triangle isocèle, les angles de la base sont égaux.

Pour pouvoir affirmer que les angles DBA et CBA sont égaux, on peut faire intervenir le critère d'égalité de triangles, mentionné dans les acquis préalables : si les côtés d'un triangle sont égaux à ceux d'un autre triangle, les deux triangles sont égaux (ou congruents).

Ce critère nous permet d'affirmer que les triangles ADB et ACB sont égaux (question 7 de la feuille de route). Et de cela, nous déduisons que :

- les angles DBA et CBA sont égaux;
- les angles DAB et CAB sont égaux.

Par conséquent :

- les quatre angles DAB, CAB, DBA et CBA sont égaux entre eux (question 9 de la feuille de route).

Un même raisonnement montre que :

- les quatre angles BDC, ADC, BCD et ACD sont égaux entre eux (questions 8 et 10 de la feuille de route).

En partant de ces renseignements, retournons au quadrilatère initial pour répondre à la question 11 de la feuille de route. Sur la figure 6, on voit que les droites AD et BC sont coupées par la sécante CD. Comme les angles alternes-internes (indiqués par « e » sur le dessin) sont égaux, les segments AD et CB sont parallèles.

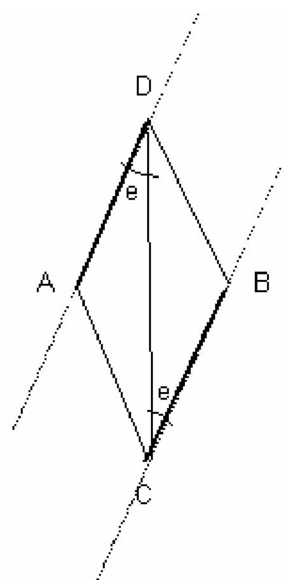


Figure 6 : Les segments AD et CB sont parallèles.

Le même raisonnement, mais en utilisant AB comme sécante des segments AC et DB, prouve que AC et DB sont parallèles.

La figure ABCD est donc un parallélogramme équilatéral ou losange (question 12 de la feuille de route).

Pour répondre aux questions 13 et 14, portons notre attention sur les triangles ADE et BDE (voir Figure 7). Que pouvons-nous dire des angles x et y? Étant donné que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° (voir acquis préalables), nous pouvons dire que x et y sont égaux.

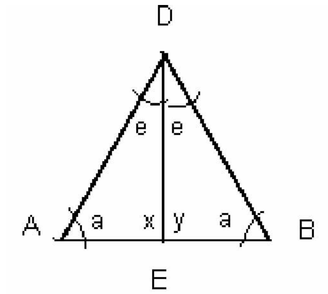


Figure 7 : Dans le triangle à gauche, x + a + e = 180.
Dans le triangle à droite, y + a + e = 180.

De plus, les angles x et y sont supplémentaires. Donc x + y = 180°. On en déduit que x = 90° et y = 90°.

Les angles droits sont donc les quatre angles autour du point E (réponse à la question 14). Le triangle BED est bien la réflexion du triangle AED par rapport à la droite DE. Par conséquent, le segment AE est égal au segment BE, ce qui prouve que DE est la médiatrice de AB (réponse à la question 16).

Comme l'analyse de la leçon l'a montré, les élèves ont tendance à utiliser des arguments plutôt empiriques. Un des buts de la leçon est de les amener à prendre conscience que les résultats précédents s'obtiennent en partant de raisonnements mathématiques déductifs.

Partie 2 (jour 2)

1. Discussion de groupe : L'enseignante ou l'enseignant demande à un groupe d'expliquer ou de faire un retour sur l'activité de la leçon précédente. L'enseignante ou l'enseignant doit amener les élèves à prendre conscience qu'ils ont réussi à construire une médiatrice sans l'usage d'une règle graduée et que les segments de droites AC, AD, BC et BD sont tous congrus, car ce sont des rayons de deux cerceaux égaux.
2. L'enseignante ou l'enseignant revoit la définition du mot *compas* avec ses élèves comme étant un outil utilisé en géométrie pour construire des arcs et des cercles.
3. L'enseignante ou l'enseignant distribue la feuille de route 3 et demande aux élèves de construire la médiatrice d'un segment AB à l'aide de leur compas et d'un abaisse-langue (qui joue le rôle de règle non graduée). Ces élèves doivent faire un retour sur le travail de la journée précédente pour accomplir la tâche.
4. L'enseignante ou l'enseignant explique aux élèves que chaque groupe doit écrire un texte qui décrit les étapes à suivre pour construire la médiatrice d'un segment de droite à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

5 L'enseignante ou l'enseignant coordonne un échange de textes entre les groupes. Les élèves doivent évaluer de façon critique le texte d'un autre groupe. Pour cela, chaque groupe suit les instructions du texte de l'autre groupe et vérifie son exactitude; chaque groupe doit également indiquer si les explications sont claires et suffisantes.

6. Par la suite, les élèves se réunissent, font un échange de leur texte, puis reprennent leur feuille sur laquelle ils apportent les changements nécessaires.

Feuille de route 1[53]
Des arcs, des cercles et des cerceaux

But

Le but général de cette activité est de construire une figure géométrique à l'aide de matériel concret et de discuter des propriétés géométriques de la figure construite. Tout le long de l'activité, vous devez discuter avec les membres de votre équipe. Vous serez amenés à comparer vos résultats avec ceux d'un autre groupe pour voir si votre groupe et l'autre groupe ont utilisé de bons arguments mathématiques.

Directives

1. Sur votre carton, tracez un segment de droite AB.
2. À l'aide de ruban gommé, désignez un des cerceaux comme étant le cerceau « 1 » et l'autre comme étant le cerceau « 2 ».
3. À l'aide du matériel qui est à votre disposition, trouvez le centre de chacun des cerceaux. (Vous pouvez faire référence au cerceau donné en exemple, c'est-à-dire au « cerceau modèle ».)
4. Placez le centre du cerceau « 1 » sur le point « A ».
5. Placez le centre du cerceau « 2 » sur le point « B ».

[53] Cette feuille a été élaborée par Rita Venne-Beaudry (École Écho-Jeunesse, Sturgeon Falls), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

6. À l'aide du stylo-feutre, désignez les points d'intersection des cerceaux sur le carton par les lettres « C » et « D ».
7. Enlevez les cerceaux et mettez-les à côté.
8. Tracez le segment de droite CD.
9. Tracez les segments de droite AC, AD, BC et BD.
10. Désignez le point d'intersection de AB et de CD à l'aide de la lettre E.
11. Quel type de forme géométrique est ACBD? Expliquez votre réponse.

    ____

    ____

12. Demandez à votre enseignante ou enseignant de vérifier si vous avez bien réalisé la première partie de l'activité. Si oui, votre groupe recevra la feuille de route 2.

Feuille de route 2[54]

Les propriétés d'un quadrilatère

Assurez-vous d'utiliser tous les symboles et la terminologie appropriés en géométrie lorsque vous répondez aux questions.

1. Identifiez toutes les figures formées.

2. Identifiez tous les angles aigus. Justifiez votre réponse.

3. Identifiez tous les angles obtus. Justifiez votre réponse.

54 Cette feuille a été élaborée par Rita Venne-Beaudry (École Écho-Jeunesse, Sturgeon Falls), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

4. Identifiez tous les segments congrus. Justifiez votre réponse.

5. Marianne affirme que le triangle ABC est isocèle; Pierre dit que Marianne se trompe, qu'il s'agit d'un triangle équilatéral; José dit que ce n'est ni isocèle, ni équilatéral. Qui a raison? Expliquez en détail votre réponse.

6. Est-ce que les triangles CAD et CBD sont isocèles?

7. Est-ce que les triangles ABC et ABD sont congruents? Justifiez votre réponse.

8. Est-ce que les triangles CAD et CBD sont congruents?

9. Identifiez tous les angles égaux à l'angle ABD.

10. Identifiez tous les angles égaux à l'angle CDB.

11. Identifiez tous les segments de droites parallèles. Justifiez votre réponse.

12. Quel type de figure géométrique est le quadrilatère ABCD? Justifiez votre réponse.

13. Justin dit : « Les angles AED et BED sont égaux. Cela résulte du fait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° ». Justin a raison, mais son argument n'est pas complet. En vous basant sur les triangles AED et BED, élaborez un argument complet.

14. Identifiez tous les angles droits.

15. Simone dit que le triangle BED est la réflexion du triangle AED par rapport à la droite DE. A-t-elle raison? Expliquez!

16. Quelle est la médiatrice de AB? Justifiez votre réponse.

Feuille de route 3[55]

Écrivez ci-dessous un texte décrivant les étapes à suivre pour construire, à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, la médiatrice d'un segment de droite AB.

55 Cette feuille a été élaborée par Rita Venne-Beaudry (École Écho-Jeunesse, Sturgeon Falls), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.