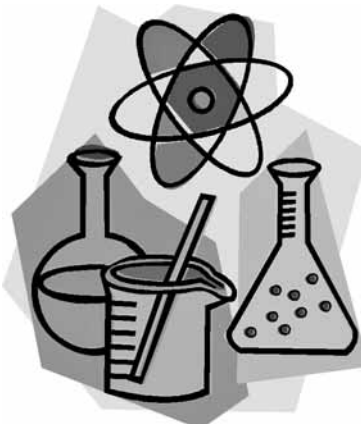


ANNEXE 5

# UNE LEÇON POUR LE CYCLE SUPÉRIEUR

Une activité sur la mathématisation du réel



Taux de variation

12<sup>e</sup> année

## Durée

240 minutes

## Description

Le but de cette activité est d'amener les élèves à explorer les relations entre plusieurs variables dans un contexte expérimental mettant l'accent sur l'argumentation, la communication et l'utilisation de la technologie. L'activité se déroule en trois parties. Dans la première partie, en travaillant en petits groupes, les élèves font, en petits groupes, une analyse qualitative de l'eau s'écoulant d'un récipient en forme de cône (entonnoir). Chaque petit groupe génère des hypothèses et des arguments quant à la relation graphique entre certaines variables. Dans la deuxième partie, les élèves comparent leurs hypothèses et leurs arguments à ceux formulés par un autre groupe. Cette comparaison leur permet de raffiner leurs hypothèses, au besoin. Dans la troisième partie, les élèves font une expérience et, à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique, procèdent à une mathématisation de l'écoulement de l'eau afin de confirmer ou d'infirmer leurs hypothèses. L'activité se termine par une discussion conjointe des hypothèses formulées et de la signification de la mathématisation effectuée.

## Domaines, attentes et contenus d'apprentissage

### Domaine

Taux de variation et caractéristiques de courbes

### Attente

Déterminer et interpréter les taux de variation de fonctions tirées du domaine des sciences naturelles et des sciences sociales.

### Contenus d'apprentissage

#### Taux de variation

- Poser des problèmes et formuler des hypothèses portant sur des taux de variation dans le domaine des sciences naturelles et des sciences sociales.
- Calculer et interpréter des taux moyens de variation à partir de différentes représentations (p. ex., équation, tableau de valeurs, représentation graphique) de fonctions tirées du domaine des sciences naturelles et sociales.
- Estimer et interpréter des taux instantanés de variation à partir de différentes représentations (p. ex., équation, tableau de valeurs, représentation graphique) de fonctions tirées du domaine des sciences naturelles et sociales.

- Expliquer, en situation et en général, la différence entre des taux moyens de variation et des taux instantanés de variation.
- Tirer des conclusions à partir de différentes représentations d'une situation pour les taux de variation et les comparer aux hypothèses initiales.

### Usage du calcul différentiel

- Déterminer, à l'aide des techniques du calcul différentiel, les caractéristiques d'un modèle pour des situations tirées du domaine des sciences naturelles et des sciences sociales.
- Comparer les caractéristiques d'un modèle mathématique aux caractéristiques des données qu'il représente.
- Rédiger une question liée à une situation et y répondre en ayant recours à des modèles mathématiques, à l'aide des techniques du calcul différentiel.
- Communiquer ses résultats de façon claire et précise en intégrant efficacement texte et représentations mathématiques.

### Notes de planification

- Préparer le laboratoire pour l'expérience (du papier quadrillé, une règle, une soupape/bouchon, un entonnoir, un chronomètre et une calculatrice à affichage graphique pour chaque groupe de trois élèves; l'entonnoir doit être assez transparent et se vider en une vingtaine de secondes).
- Reproduire les feuilles de route 1, 2, 3 et 4 (voir ci-dessous) que les élèves utiliseront pendant l'étude des taux de variation et de l'élaboration de la mathématisation du phénomène en question.
- S'assurer qu'on dispose du matériel suivant (pour chaque groupe de trois ou quatre élèves) :
  - un grand entonnoir;
  - une règle;
  - un cylindre gradué;
  - de l'eau;
  - un chronomètre;
  - une calculatrice TI-83 Plus;
  - une soupape/bouchon (pour arrêter l'eau à 2, 4, 6, 8).

## Déroulement de l'activité

### Amorce ou mise en situation (en salle de classe)

#### Démonstration par l'enseignant

Dans cette partie, l'enseignant fait une démonstration devant toute la classe de l'eau s'écoulant dans un cône. Pour attirer l'attention des élèves sur les variables qu'on retiendra par la suite, alors que le cône se vide, il souligne le fait que la hauteur de la surface de l'eau qui reste dans le cône change au fur et à mesure que le temps passe. Il souligne également le fait que le volume et le rayon du cercle formé par la surface de l'eau changent aussi en fonction du temps.

#### Partie 1 (en salle de classe) : l'étude qualitative du phénomène

En groupes de trois, à l'aide de la feuille de route 1 (une feuille par élève; la feuille se trouve ci-après), les élèves discutent et font une analyse qualitative de certaines variables étudiées. Sur la feuille de route, ils doivent esquisser plusieurs graphiques exprimant la relation entre les variables. L'enseignant circule, écoute et anime la discussion des élèves, s'il y a lieu.

#### Partie 2 (en salle de classe) : comparaison et analyse des résultats d'un autre groupe

Après avoir rempli la feuille de route, chaque groupe d'élèves échange la feuille de route avec un autre groupe désigné par l'enseignant. Puisqu'il y a trois feuilles de route par groupe et qu'une feuille seulement est envoyée à l'autre groupe, les élèves pourront comparer leurs résultats à ceux de l'autre groupe. À l'aide de la feuille de route 2 (voir ci-après), les élèves procèdent à une étude et à une évaluation des graphiques et des explications fournies par l'autre groupe.

Quand les élèves ont terminé l'évaluation, les groupes qui ont échangé la feuille de route 1 se réunissent et discutent de leur évaluation, et ce, dans le respect des autres et de façon objective.

#### Partie 3 : expérimentation, exploration et mathématisation

##### Au laboratoire

À cette étape, les élèves reviennent à la structure initiale de petits groupes de trois élèves. On demande aux élèves de tracer un schéma du cône afin de mathématiser le phénomène de l'écoulement de l'eau dans un cylindre. On leur demande de mesurer la hauteur et le diamètre de l'entonnoir. On leur demande également de désigner, sur le schéma ainsi construit, les variables suivantes : surface de l'eau qui reste dans l'entonnoir, rayon de la surface de l'eau, hauteur de l'eau, volume de l'eau.

Ils commencent en cherchant une expression algébrique se rapportant à certaines des variables de base qui seront nécessaires à la mathématisation du phénomène (voir la feuille de route 3). Quand les élèves ont fini, l'enseignant demande à l'un d'eux de venir présenter les résultats de son groupe au tableau. Les autres élèves ont l'occasion de faire valoir leur accord ou leur désaccord. L'élève au tableau et son groupe peuvent contre-argumenter, etc.

Quand tous les groupes se sont mis d'accord sur les expressions ou formules algébriques qui conviennent le mieux à la relation entre certaines variables de base, on passe à la phase expérimentale.

À cette étape, les élèves, toujours en groupes de trois, utilisent la feuille de route 4 afin de faire l'expérience.

– Présenter aux élèves le problème suivant :

Un réservoir en forme de cône repose sur sa pointe. De l'eau s'écoule de sa pointe dans un cylindre gradué. Des mesures de l'eau qui s'écoule sont prises toutes les deux secondes.

– Demander aux groupes de suivre la démarche à l'aide de la feuille de route 4.

– Quand les élèves ont terminé, l'enseignant demande à un représentant de chaque équipe de passer au tableau afin de présenter une partie du travail. Par exemple, le représentant du groupe 1 peut expliquer comment son groupe a trouvé les graphiques b) et d) à la question 1; la représentante du groupe 2 peut expliquer la marche à suivre que ses membres ont suivie pour trouver les graphiques f) et g) à la question 2.

Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant est d'animer une séance d'évaluation des arguments présentés par les différents groupes et d'intervenir, au besoin, pour s'assurer que les résultats sont cohérents par rapport aux exigences de la pratique scientifique et mathématique.

### Activités complémentaires/Réinvestissement

– Demander à l'élève d'étudier qualitativement des problèmes d'écoulement d'eau en utilisant des cônes obliques et d'autres récipients similaires (p. ex., une sphère).

Note : Dans la partie expérimentale, pour mesurer la hauteur de l'eau dans le cône, on peut utiliser un CBR (Calculator-Based Ranger).

## Feuille de route 1<sup>56</sup>

Groupe numéro : \_\_\_\_\_

Les membres de ton groupe sont (écris ton nom en premier) :

---

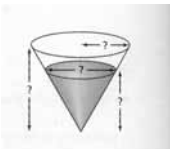
### Partie 1 : étude qualitative du phénomène

Un cône contient de l'eau. Il se vide à un débit constant.

#### Question 1





**Sans faire de calculs**, aux questions a), b), c) et d), on te demande :

- a) de discuter avec les autres membres de ton équipe de l'allure du graphique de la relation entre les variables indiquées (voir la première ligne de chaque rectangle à gauche),



- b) de faire une esquisse du graphique et
- c) d'expliquer ton raisonnement à l'aide d'arguments convaincants.



<sup>56</sup> Cette feuille a été élaborée par Gilbert Lacroix (École secondaire Macdonald-Cartier, Sudbury), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

<p>Variables : le rayon (<math>r</math>) de la surface de l'eau dans le cône et la hauteur (<math>h</math>) de l'eau</p> 	<p>Explique ton raisonnement :</p>
<p>Variables : la hauteur et le rayon</p> 	<p>Explique ton raisonnement :</p>
<p>Variables : le rayon et le temps</p> 	<p>Explique ton raisonnement :</p>
<p>Variables : le rayon et le temps</p> 	<p>Explique ton raisonnement :</p>

## Question 2

**Sans faire de calculs**, aux questions e), f) et g), on te demande :

- de discuter avec les autres membres de ton équipe de l'allure du graphique de la relation entre les variables indiquées (voir la première ligne de chaque rectangle à gauche),
- de faire une esquisse du graphique et
- d'expliquer ton raisonnement à l'aide d'arguments convaincants.

<p>Variables : le volume (<math>V</math>) de l'eau qui reste dans le cône et la hauteur (<math>h</math>) de l'eau qui reste dans le cône</p> 	<p>Explique ton raisonnement :</p>
<p>Variables : le volume de l'eau qui reste dans le cône et le rayon de la surface de l'eau dans le cône</p> 	<p>Explique ton raisonnement :</p>

Variables : le volume ( $V$ ) de l'eau qui reste dans le cône et le temps



Explique ton raisonnement :

## Feuille de route 2<sup>57</sup>

---

Groupe numéro : \_\_\_\_\_

Les membres de ton groupe sont (écris ton nom en premier) :

---

### **Partie 2 : comparaison et analyse des résultats d'un autre groupe**

#### **Question 3.1**

Dans cette partie, on te demande d'analyser les résultats d'un autre groupe et de les comparer à ceux que ton groupe a obtenus.

Pour chaque question de a) à g) de la feuille de route 1, tu dois te prononcer sur les points suivants :

1. Est-ce que l'allure de la relation est correcte?
2. Est-ce que les arguments sont convaincants?

---

<sup>57</sup> Cette feuille a été élaborée par Gilbert Lacroix (École secondaire Macdonald-Cartier, Sudbury), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

### Question 3.2

Dans cette partie, les groupes qui ont échangé leur feuille se réunissent et commentent, de façon respectueuse et en toute objectivité, les arguments des autres. Chaque groupe a ainsi l'occasion de défendre ses arguments.

Après l'échange, les groupes reviennent à leur place.

À la suite de l'analyse des réponses fournies par l'autre groupe et de la discussion que vous avez eue, y a-t-il des réponses que vous avez données pour lesquelles vous êtes en mesure maintenant d'améliorer vos arguments? Si oui, indiquez ces questions, changez vos réponses au besoin et rédigez de nouveaux raisonnements, basés sur de meilleurs arguments.

## Feuille de route 3<sup>58</sup>

---

Groupe numéro : \_\_\_\_\_

Les membres de ton groupe sont (écris ton nom en premier) :

---

### Partie 3 : expérimentation, exploration et mathématisation

#### Question 4

Mesure la hauteur et le diamètre de l'entonnoir.

Réponses : \_\_\_\_\_

Trace ci-dessous un schéma du cône afin de mathématiser le phénomène de l'écoulement de l'eau dans un cylindre.

---

<sup>58</sup> Cette feuille a été élaborée par Gilbert Lacroix (École secondaire Macdonald-Cartier, Sudbury), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

Identifie, sur le schéma construit, les variables suivantes : rayon de la surface de l'eau qui reste dans l'entonnoir, hauteur de l'eau, volume de l'eau.

Trouve une formule mathématique qui relie le rayon à la hauteur de l'eau dans l'entonnoir.

### Question 5

Sachant que la formule du volume d'un cône est  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ , trouve une formule reliant la hauteur d'eau qui reste dans le cône au volume d'eau qui reste dans le cône.

## Feuille de route 4<sup>59</sup>

Les membres de ton groupe sont (écris ton nom en premier) :

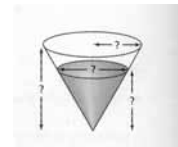
---

### Objectif

Dans cette expérience, en continuant à travailler en groupes de trois, vous étudierez les relations entre plusieurs des variables qui interviennent lorsque l'eau s'écoule d'un entonnoir dans un cylindre gradué.

### Matériel

- un grand entonnoir
- une règle
- un cylindre gradué
- de l'eau
- un chronomètre
- une calculatrice TI-83 Plus<sup>®</sup>
- une soupape/bouchon (pour arrêter l'eau à 2, 4, 6, 8) ou votre pouce!



<sup>59</sup> Cette feuille a été élaborée par Gilbert Lacroix (École secondaire Macdonald-Cartier, Sudbury), Luis Radford et Serge Demers (Université Laurentienne) conformément à un programme de recherche subventionné par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. La feuille peut être reproduite et adaptée aux fins d'enseignement.

## Démarche

1. Obstruez l'ouverture du bas et remplissez entièrement l'entonnoir d'eau.
2. Mesurez la hauteur de l'eau dans le cône et notez-la. Mesurez également le rayon de la surface d'eau au haut de l'entonnoir. Ces valeurs correspondent à  $t = 0$ . Inscrivez les autres valeurs dans le tableau ci-dessous.
3. Afin d'étudier la relation entre le temps et les autres variables (rayon, hauteur, volume) du cylindre, laissez l'eau s'écouler de l'entonnoir dans le cylindre gradué et prenez les mesures correspondant aux variables lorsque le temps d'écoulement est égal à 2 secondes, à 4 secondes, à 6 secondes, etc. jusqu'à ce que l'entonnoir soit complètement vide, en ayant soin de reboucher rapidement l'ouverture après chaque arrêt avec son doigt ou la soupape.
4. Remplissez le tableau ci-dessous.

Temps en secondes (t)	Rayon en cm (r)	Hauteur en cm (h)	Volume-sorti (Vs)	Volume dans le cône (Vc)
0				
2				
4				
6				
8				
10				

**Question 6**

En partant des données du tableau de valeurs, utilisez la calculatrice à affichage graphique pour tracer le graphique de la relation entre les variables indiquées ci-dessous :

Le volume dans le cône ( $V_c$ ) et le temps ( $t$ ).



Est-ce que votre résultat reflète ce que vous aviez prédit à la question 2? Expliquez les différences, s'il y a lieu.

**Question 7**

1. Trouvez une formule mathématique qui donne  $V_c$  en fonction de  $t$ .



6. Est-ce que ces graphiques ressemblent à celui que vous avez esquissé à la question 1? Expliquez!



### Question 8

En utilisant la formule de  $h(t)$  obtenue à la question 7.3, trouvez la valeur de  $\frac{dh}{dt}$  au point  $t = 1$  s et au point  $t = 2$  s. Expliquez le sens de ces valeurs (Pourquoi sont-elles différentes ou égales? Que signifie leur signe?).